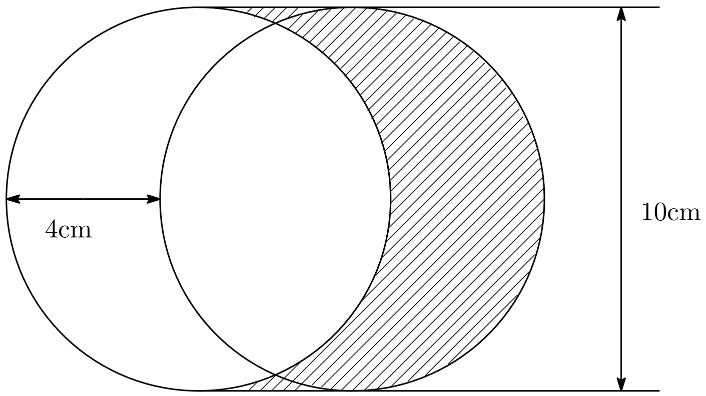
3年理系数学　補説プリント　**カバリエリの定理，パップス・ギュルダンの定理**

面積は area・square measure 二次元の量，体積は volume 三次元の量。(ちなみに一次元の量は線分の長さ length)。さて教科書に証明がない定理を２つ紹介する。まず，**カバリエリの定理**。
Cavalieri(1598-1647) はガリレイの弟子だそうだ。Pappus は四世紀の人・Guldin(1577-1643) はカバリエリと同時代の人だ。ニュートン (1642-1727) より一世代前の人達だ。

> 平面上に二つの図形 A，B があって，一定の方向の直線で両図形を切るとき，A の切口の長さがつねに B の切口の長さの k 倍であるならば，A の面積は B の面積の k 倍である。

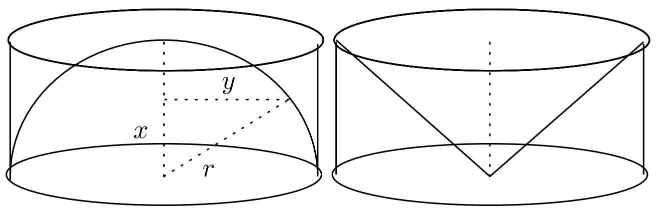
積分を考えれば当たり前と思えるかな。

問１　次の斜線の部分の面積を計算せよ。



この問題，最近の大学生が解けない問題の有名なものだそうだ。
君たちはもう簡単に答が出せるよな。これは次元をあげても同じです。

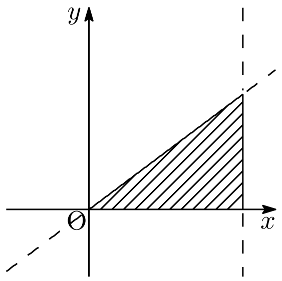
問２　半径 r の球の体積が $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを，円錐の体積が円柱の体積の $\dfrac{1}{3}$ であることを用いて証明せよ。



次に，**パップス・ギュルダンの定理**。

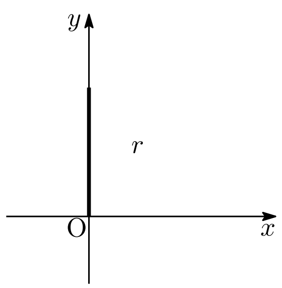
> 空間内の一つの平面上に互いに交わらない直線 l と図形 D があるとき，D を l のまわりに空間内で回転させて得られる回転体の体積は，D の面積と，D の重心 (密度は一様として) が l のまわりを回転して描く円周の長さとの積に等しい。

問３　底面の円の半径 r 高さ h の円錐の体積が $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ であることを，パップス・ギュルダンの定理を使って証明せよ。



これは次元をさげても同じです。

問４　半径 r の円の面積が πr^2 になることを，パップス・ギュルダンの定理を使って証明せよ。



これがあると，ある意味では体積を求めることと重心の位置を求めることは同じ事なのだ。

問５　半径 1 の半円の重心の位置をパップス・ギュルダンの定理を使って求めよ。