三角パズル

次の値を求めよ。

(1) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

(2) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$

(3) $\cos \dfrac{\pi}{8} + \cos \dfrac{3\pi}{8} + \cos \dfrac{5\pi}{8} + \cos \dfrac{7\pi}{8}$

(4) $\cos \dfrac{\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{3\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{5\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{7\pi}{8}$

(5) $\cos \dfrac{\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{2\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{3\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{4\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{5\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{6\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{7\pi}{8}$

(6) $\cos \dfrac{2\pi}{5} + \cos \dfrac{4\pi}{5} + \cos \dfrac{6\pi}{5} + \cos \dfrac{8\pi}{5} + \cos \dfrac{10\pi}{5}$

(7) $\cos \dfrac{\pi}{7} \cdot \cos \dfrac{2\pi}{7} \cdot \cos \dfrac{3\pi}{7}$

(8) $\tan \dfrac{\pi}{5} \cdot \tan \dfrac{2\pi}{5} \cdot \tan \dfrac{3\pi}{5} \cdot \tan \dfrac{4\pi}{5}$

18 関西大　左の (2) と関連して

すべての実数 x に対して，

等式 $\sin(\frac{\pi}{3}-x)\sin(\frac{\pi}{3}+x)=\frac{1}{2}\{\cos(\square x)+\square\}$ が成り立つから，

$\sin(\frac{\pi}{3}-x)\cdot\sin x\cdot\sin(\frac{\pi}{3}+x)=\frac{1}{4}\sin(\square x)$ が成り立つ。

よって，$\sin\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{4\pi}{9}=\square$ である。

また，すべての実数 x に対して，等式 $\sin x\cos x=\square\sin(\square x)$ が成り立つ。

よって，$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\square$ である。

答）順に $2,\frac{1}{2},\frac{1}{4},3,\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{1}{2},2,\frac{1}{8}$

12 東北後期　左の (7) の関連して

(1)　実数 θ に対し，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta,\beta=\cos\theta-i\sin\theta$ とおく。すべての自然数 n に対して，

$\alpha^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,\beta^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$ が成り立つことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。

(2)　$\theta=\frac{2\pi}{7}$ とし，(1) で定めた α,β を考える。$\alpha^7=1$ を示せ。

また，k，l は自然数で $k+l$ が 7 の倍数のとき，$\alpha^k=\beta^l$ となることを示せ。

(3)　$\theta=\frac{2\pi}{7}$ とし，(1) で定めた α,β を考える。

$A=\alpha+\alpha^2+\alpha^4,B=\beta+\beta^2+\beta^4$ とおいたとき，$A+B,AB$ の値を求めよ。

(4)　$\theta=\frac{2\pi}{7}$ のとき，$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta$ の値を求めよ。

答)(1)　略　　(2)　略　　(3)　$A+B=-1,AB=2$　　(4)　$\frac{\sqrt{7}}{2}$

共通テスト模試　左の (8) のヒント

$\cos\frac{2}{5}\pi$ の値を求めよ。

$$\tan\frac{\theta}{2}\cdot\tan\theta\cdot\tan\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\tan(\pi-\theta)=\left(\frac{\square}{\cos\theta}-\square\right)^2$$

答）(1)$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　(2)$1,1$

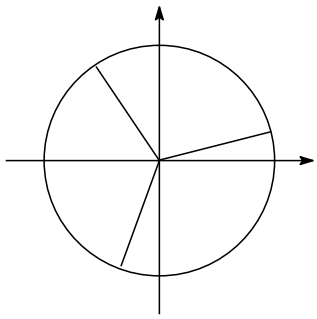
11 甲南大 次の式を簡単にせよ。

$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\theta\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

答）$\frac{3}{4}$

三角パズル 解答

(1) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$
和を積に変えればできるけど，図形の関係わかる？
$\cos 100^\circ = \cos 260^\circ$ だから，$20^\circ, 140^\circ, 260^\circ$ の関係



(2) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$
積を和に変えればできるけど，どうして値が出るかわかる？ヒントは三倍角の公式
右の関西大学の問題参考

(3) $\cos\dfrac{\pi}{8} + \cos\dfrac{3\pi}{8} + \cos\dfrac{5\pi}{8} + \cos\dfrac{7\pi}{8} = 0$
$\cos\dfrac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \dfrac{3\pi}{8}\right) = -\cos\dfrac{3\pi}{8}, \cdots$

(4) $\cos\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{3\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{5\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{1}{8}$
積を和に変えることぐらいしかなくない？
$\left(\cos\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{3\pi}{8}\right)^2 = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}\,\dfrac{1+\cos\dfrac{3\pi}{4}}{2} = \dfrac{1}{8}$ としてもいい

(5) $\cos\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{3\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{4\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{5\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{6\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{7\pi}{8} = 0$
どっかで 0

(6) $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} + \cos\dfrac{10\pi}{5} = 0$
これが，n を自然数とし，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ が $z^n = 1 (z \neq 1)$ を満たすとき，
$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta = 0$ を使うやつ！

(7) $\cos\dfrac{\pi}{7} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{7} \cdot \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{8}$
右の問題やってからやるとできるかも？
$\sin\dfrac{\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{2\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{3\pi}{7} = \alpha$ とすると，
$\sin\dfrac{\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{2\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{3\pi}{7} \cos\dfrac{\pi}{7} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{7} \cdot \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{2\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{4\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{6\pi}{7} = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{2\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{3\pi}{7} \cdot \sin\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{1}{8}\alpha$
$z = \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$ とおいて，$z^7 = -1$ を使ってもできる。

(8)$\tan\dfrac{\pi}{5} \cdot \tan\dfrac{2\pi}{5} \cdot \tan\dfrac{3\pi}{5} \cdot \tan\dfrac{4\pi}{5} = 5$
右の問題やってからやるとできるかも？
$\theta = \dfrac{2\pi}{5}$ とおくと，$\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2 = \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}-1} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{5} + 1 - 1\right)^2 = 5$

18 関西大　左の (2) と関連して

答）　$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\sin x}{2}\left(1-2\sin^2 x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sin x}{4}\left(3-4\sin^2 x\right)=\frac{\sin 3x}{4}$

よって，$\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2}{9}\pi\sin\frac{4}{9}\pi=\frac{1}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ より，

$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2}{9}\pi\sin\frac{4}{9}\pi=\frac{1}{8}\sin\frac{2}{9}\pi\sin\frac{4}{9}\pi\sin\frac{8}{9}\pi=\frac{1}{8}\sin\frac{2}{9}\pi\sin\frac{4}{9}\pi\sin\frac{\pi}{9}$

よって，$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi=\frac{1}{8}$

12 東北後期

答 (1)　$\beta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ でド・モアブル

(2)　$\alpha^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ 又 $k+l=7p$(p は整数) とすると，

$\alpha^k=\alpha^{7p-l}=\alpha^{-l}=\cos(-l\theta)+i\sin(-l\theta)=\cos l\theta-i\sin l\theta=\beta^l$

(3)　$\alpha^7=1$ より $(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 1$ より $\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

$A+B=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\beta+\beta^2+\beta^4=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha=-1$

$AB=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\beta+\beta^2+\beta^4)=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3)=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1+1+1=2$

(4) A,B は 2 次方程式 $t^2+t+2=0$ の解，つまり $t=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

A は虚部が正，求めるものは $\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ の虚数部分，つまり $\frac{\sqrt{7}}{2}$

共通テスト模試　左の (8) のヒント

答）図でやってもいいし，$z^5=1$ を使ってもいい。$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ なる相反方程式を解く。

$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0, z+\frac{1}{z}=t$ とおくと，

$t^2-2+t+1=0$ つまり，$t^2+t-1=0$

$t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cos\frac{2}{5}\pi$

よって，$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\tan^2\frac{\theta}{2}\tan^2\theta=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$

11 甲南大 次の式を簡単にせよ。

$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\theta\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin^2\theta+\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin\theta\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

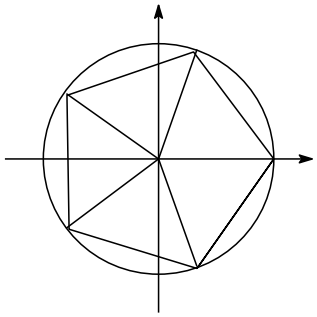
$=\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\sin^2\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta=\frac{3}{4}$

これもちょっと不思議な感じなので，一般化してみると，$\cos\alpha=\frac{k}{2}(-2\leqq k\leqq 2)$ のとき，

$\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)-k\sin\theta\cdot\sin(\theta+\alpha)=1-\frac{k^2}{4}$　そう面白くないな。

三角パズル 余談

三角関数の値の**和**については，
原点中心の正多角形の頂点のベクトルは，すべて足すと 0 ベクトル。
回転しても不変な点は原点しかない。
$\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{6\pi}{n}\right)+\cdots+\sin(\alpha+2\pi)=0$
$\alpha=0$ のときは， x 軸に関する対称性より自明。
$\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{6\pi}{n}\right)+\cdots+\cos(\alpha+2\pi)=0$
$\alpha=0$ で n が偶数のときは，y 軸に関する対称性より自明。



例えば，$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ とすれば，対称性も考慮して，
$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 2\pi=0$ より
$2\cos\theta+2\cos 2\theta+1=0$
$2\cos\theta+2(2\cos^2\theta-1)+1=0$
$4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$
$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

三角関数の値の**積**については，
$\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}$
何故なら
$c=\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}, s=\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}$ とおくと，
$c\cdot s=\dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdot\sin\dfrac{4\pi}{2n+1}\cdots\sin\dfrac{2n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdot\sin\dfrac{4\pi}{2n+1}\cdots\sin\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}s$
よって，$c=\dfrac{1}{2^n}$，高校生はここまで。では，s の方はとなると，これが凄い。$s=\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

例えば，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2},\cos\dfrac{\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4},\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$
$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sin\dfrac{\pi}{5}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{4},\sin\dfrac{\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$
又，余角の関係から
$\cos\dfrac{\pi}{2n}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\sin\dfrac{\pi}{2n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

例えば，$\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{6}=\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{4},$
$\cos\dfrac{\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{8}=\sin\dfrac{\pi}{8}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{8}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{4}}{8}=\dfrac{1}{4}$

で，この核心は，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\sqrt{n}$
この公式見たのは，さるホームページで証明なかったのだ。$n=5$ 位まではなんとかなるが，一般の n では難しそう。
もちろん，Geogebra も Mxima も無理，しかし，WolframAlpha はちゃんと答えるんだな。さすが Mathmatica！

$n=5$ でやってみる。
$z^5=1$ から,$z=1, z^4+z^3+z^2+z+1=0$
$z+\bar{z}=t$ とおくと,$t^2-2+t+1=0$ つまり,$t^2+t-1=0$ これから,$t^2=1-t$
$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ だから,$t=z+\bar{z}=2\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ よって,$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$2\cos\dfrac{2\pi}{5}\cdot 2\cos\dfrac{4\pi}{5}=(z+\bar{z})(z^2+\bar{z^2})=t(t^2-2)=t(1-t-2)=-t^2-t=-1+t-t=-1$
よって，$2\cos\dfrac{2\pi}{5}\cdot 2\cos\dfrac{\pi}{5}=1$
これを正弦でやればいい。$2\sin\theta=\dfrac{z-\bar{z}}{i}=-(z-\bar{z})i>0$ なので，
$z-\bar{z}=\sqrt{(z+\bar{z})^2-4}=\sqrt{t^2-4}=\sqrt{-t-3}$
$2\sin\dfrac{2\pi}{5}\cdot 2\sin\dfrac{4\pi}{5}=-(z-\bar{z})(z^2-\bar{z^2})=-(z-\bar{z})^2(z+\bar{z})=-(t^2-4)t=t^2+3t=2t+1=\sqrt{5}$
よって，$2\sin\dfrac{\pi}{5}\cdot 2\sin\dfrac{2\pi}{5}=\sqrt{5}$