四面体の体積

四面体（tetrahedron）の体積は，3 本の 1 次独立なベクトルの平行六面体の 6 分の 1 で計算できるとはいえ，ここでは，視点を変えて整理してみる。

以下，四面体の頂点を O,A,B,C とし，$OA = a, OB = b, OC = c, AB = c', BC = a', CA = b'$ とする。

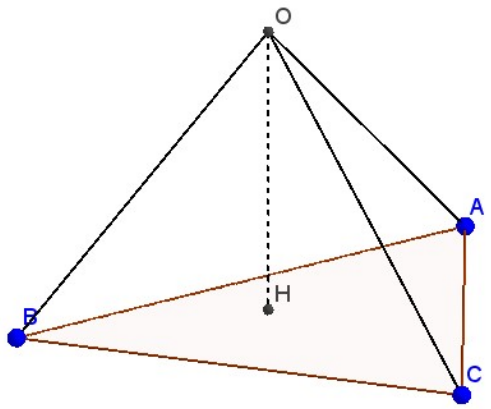
まず**等脚（isosceles）四面体**，教科書レベル。

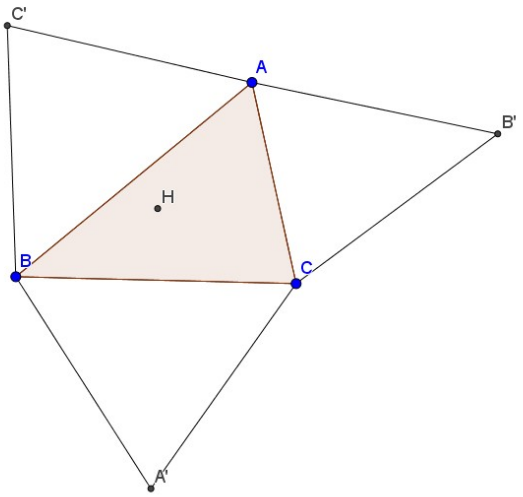
O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H が，$\triangle ABC$ の外心になる。

何故なら，$a = b = c$,OH 共通の直角三角形より，$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$ だから。

底面の 3 辺の長さがわかれば，面積と外接円の半径も計算でき，h も三平方の定理より計算できて，

体積が計算できる。





次に**等面（equilateral）四面体**，大学入試レベル。

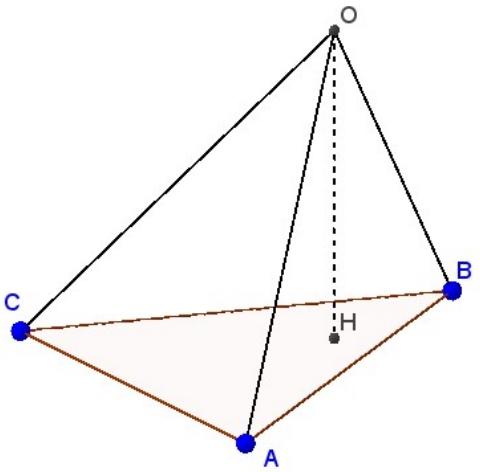
このときは，$\triangle ABC$ の各辺に対応する点を通り，その辺に平行な直線からなる三角形を $\triangle A'B'C'$ とすると，

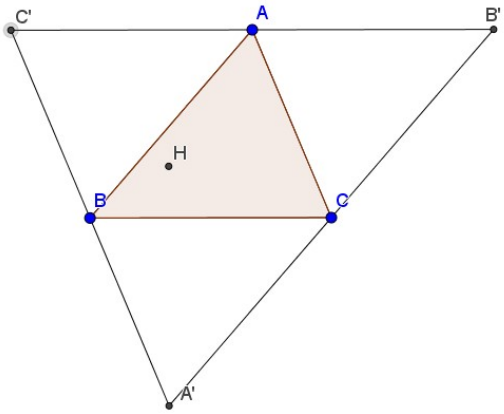
O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H が，$\triangle A'B'C'$ の垂心になる。

このとき，$a = a', b = b', c = c'$

対応する（OC と AB とか）辺の中点を結ぶ直線は直交し，一点で交わる。

位置ベクトル $\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$ が，外接球の中心だというのが 20 年九州大の入試問題。





体積を求めるのに，もっと簡単なのは，O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H が頂点に重なるもの。位置をずらして OA,OB,OC が直交するとして，**6 分の 1 四面体**とでも言おうか。

$V = \dfrac{1}{6}abc$

このとき，$a^2+b^2=c'^2, b^2+c^2=a'^2, c^2+a^2=b'^2 \cdots$① で，$OA \perp BC, OB \perp CA, OC \perp AB$

このうち 2 つが成り立てば，簡単に体積の計算はできて，

$a^2+b^2=c'^2, b^2+c^2=a'^2$ で，$OB \perp CA$

底面 △OAC 高さが OB となって，体積は $V = \dfrac{1}{6}abc\sin\theta$ $(\theta = \angle AOC)$

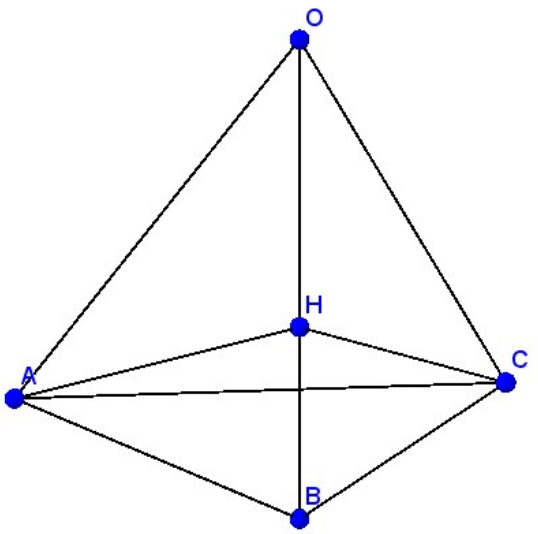
①から，必要条件として出てくる式 $a^2+a'^2=c^2+c'^2$ を考えよう。

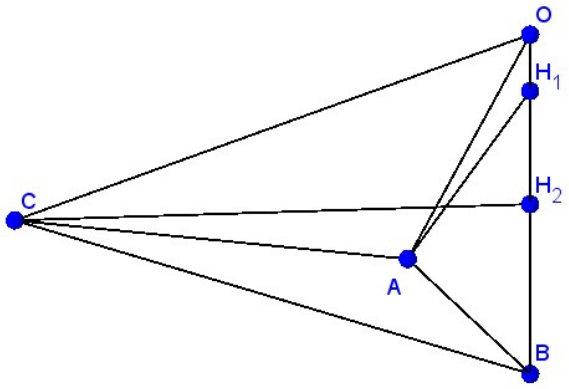
同値変形すると，$a^2+b^2-c'^2=b^2+c^2-a'^2$ から $a\dfrac{a^2+b^2-c'^2}{2ab} = c\dfrac{b^2+c^2-a'^2}{2bc}$

よって，$a\cos\angle AOB = c\cos\angle COB$

すなわち，A,C から OB に下ろした垂線の足が一致する（左図）。$OB \perp AC$

体積は $V = \dfrac{1}{3}\triangle HAC \cdot b = \dfrac{1}{6}abc\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$ $(\theta_1 = \angle AOB, \theta_2 = \angle COB, \theta_3 = \angle AHC)$





次に，垂線の足が一致しないとき（右図）。

体積は $V = \dfrac{1}{3}\triangle OAB \cdot (C\text{ からの高さ}) = \dfrac{1}{6}abc\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$

$(\theta_1 = \angle AOB, \theta_2 = \angle COB, \theta_3 : AH_1 \text{と} CH_2 \text{のなす角})$

4 辺の長さから体積を求めよという問題で，どうですか？

左図は $a=5, b=5, c=3\sqrt{2}, a'=\sqrt{13}, b'=5, c'=2\sqrt{5}$ $\quad (V=10)$

右図は $a=2, b=6, c=5, a'=5, b'=\sqrt{15}, c'=2\sqrt{7}$ $\quad (V=4\sqrt{2})$

で，これが結局，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の外積と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積，つまり，3 本の 1 次独立なベクトルの平行六面体の 6 分の 1 というわけだ。