循環する解をもつ方程式

　このテーマではもう 3 回目，これで終わりかな。
1 回目は数研通信，約 15 年前。3 乗して単位行列の実数倍になる整数を要素とする行列を利用して，1 次分数式を作り，それを解とする 3 次方程式を作った。大学入試レベルのほとんどがこれ。
2 回目は入試問題解説用のプリント，約 5 年前，両方とも早稲田がきっかけか。
上の 3 次方程式の一つが 1 の累乗根（7 乗根）を利用して作られるというもの。
今回は「体論，これはおもしろい　方程式と体の理論」から, ガウス理論に近づいて終わりだな。
　その本の第 3 章章末問題の作り方。
整数にこだわらなければ，60 度の回転行列を 3 乗すれば単位行列の実数倍になる。

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

ここから 1 次分数変換 $\dfrac{x+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}x+1}$ を作り（本の問題はこれ以後），この循環する式を解とする方程式を作ればいい（1 回目のように）。

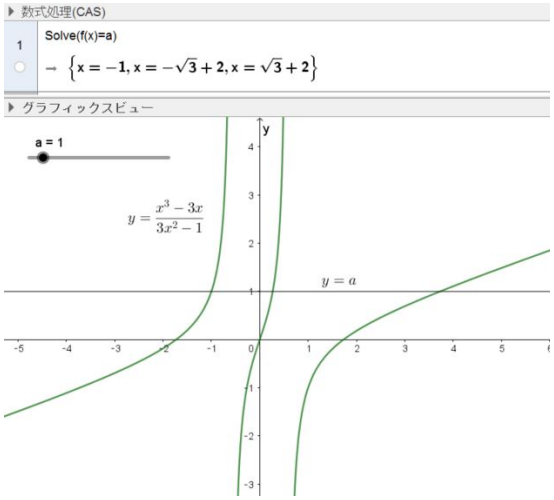
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

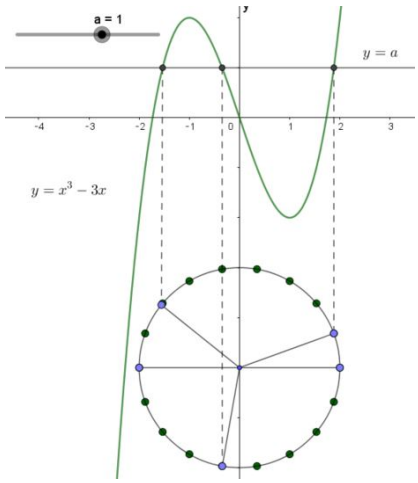
これから，循環する解を，$\alpha, \beta = \dfrac{\alpha+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\alpha+1}, \gamma = \dfrac{\alpha-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\alpha+1}$ として，これを解にもつ方程式を作る。

$\beta+\gamma = \dfrac{8\alpha}{-3\alpha^2+1}, \beta\gamma = \dfrac{\alpha^2-3}{-3\alpha^2+1}$ より，

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{3\alpha(\alpha^2-3)}{3\alpha^2-1}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -\frac{\alpha(\alpha^2-3)}{3\alpha^2-1}$$

$\dfrac{\alpha(\alpha^2-3)}{3\alpha^2-1} = a$ とおくと，$x^3-3ax^2-3x+a=0$



グラフの交点が，循環する 3 つの解。
手で計算できそうなものは，
$a = 0, \pm 1$ くらいかな。
0 を $\dfrac{x+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}x+1}$ で変換して，$\sqrt{3}$,
さらに変換して，$-\sqrt{3}$
その 3 数を解とする方程式は $a=0$ で，
$x^3-3x=0$

　この本の 5 章章末問題は，3 倍角の公式から次のことを示し，3 次方程式の近似を三角関数の値から求めることができるという内容。
3 次方程式 $x^3-3x=a$ は，$a = 2\cos 3\theta$ のとき，
解は，$x = 2\cos\theta, 2\cos\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right), 2\cos\left(\theta+\dfrac{4}{3}\pi\right)$
$a=1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{9}$，$a=-1$ のとき $\theta = \dfrac{2\pi}{9}$
　どちらも 1 の 9 乗根からできるもの。
その外整数にこだわらなけば，いくらでもできる。