完全順列　周辺

「n 人あての封筒と，同じ n 人あての手紙がある。封筒の宛名と中身が1つも一致しない場合の数はいくつか？」
これは問題が簡単でも，答を見つけるのに公式を使いづらい例として有名なものだ。
この問題は元々手紙と宛名の有名な問題で「**ベルヌーイ・オイラーの封筒取り違え問題**」という。ベルヌーイとオイラーは数学者の名前。（オイラーという人は最高の数学者といってもいいかな。）
最近は「**モンモール数** (Montmort number) という。これはフランスの数学者 Pierre Raymond de Montmort にちなんで名づけられた。」と Wiki にある。

高校の数学 A にこの問題がある。1年生は樹形図なりをかいて考えるが，少し法則を見つけながら計算すると。
n 人の手紙と封筒をすべて違って入れる入れ方の数を $f(n)$ とおく。
すると，すぐわかるのは $f(1)=0, f(2)=1, f(3)=2$
$f(n)$ を，すべての n 個の順列（$n!$ 通り）から同じところがあるものを引こうと考えると，
すべて同じ（n 個同じ）入れ方は1通り。
$n-1$ 個同じ入れ方は0通り。
$n-2$ 個は ${}_n\mathrm{C}_2\times f(2)$ 通り。
$\cdots$ とやっていって　1個は ${}_n\mathrm{C}_1\times f(n-1)$ 通り。
$\therefore\quad f(n)=n!-\{1+{}_n\mathrm{C}_2\cdot f(2)+\cdots+{}_n\mathrm{C}_1\cdot f(n-1)\}$
これで $f(4), f(5), f(6)$ を求めよう。
$f(4)=4!-\{1+{}_4\mathrm{C}_2\cdot f(2)+{}_4\mathrm{C}_1\cdot f(3)\}=24-(1+6\cdot1+4\cdot2)=9$, 同様に $f(5)=44, f(6)=265$
授業では,「2年生になるとより洗練された解き方で解けるのでお楽しみに」と言うことにしている。

で，これの一般項を求めよう。となると，上のように**漸化式**を使うことになる。
$f(1)=0, f(2)=1$ ときて，漸化式を考える。
1から $n+1$ までの完全順列があって，その $f(n+1)$ 個の入れ方の，1から $n+1$ までのどれかと $n+2$ を入れ換えても完全順列。
1から $n+1$ までの順列があって，$n+1$ 個のうち1個が同じの完全順列 $f(n)$ 個の入れ方の，その同じ数字と $n+2$ を入れ換えても完全順列。作り方はこれしかない。
よって，$f(n+2)=(n+1)\{f(n+1)+f(n)\}$
$f(3)=2\{f(2)+f(1)\}=2, f(4)=3\{f(3)+f(2)\}=9, f(5)=4\{f(4)+f(3)\}=44, f(6)=5\{f(5)+f(4)\}=265$ で上と同じになる。

次は上の漸化式を解くことになる。
$f(1)=0, f(2)=1, f(n+2)=(n+1)\{f(n+1)+f(n)\}$
授業では少し難しいが，不変式（項が変わっても式の構造は変わらない）をみつける練習に，最後にこれをやる。
まず，係数 $(n+1)$ の処理，$f(n+2)-(n+2)f(n+1)=-\{f(n+1)-(n+1)f(n)\}$ うまくいった。
$f(n)-n\cdot f(n-1)=-\{f(n-1)-(n-2)f(n-2)\}=\cdots=(-1)^{n-2}\{f(2)-f(1)\}=(-1)^n$
次に，係数 n の処理，両辺を $n!$ で割って $\dfrac{f(n)}{n!}-\dfrac{f(n-1)}{(n-1)!}=\dfrac{(-1)^n}{n!}$
また，不変式の考え方で，うまくいった。
最後の式に $n=1,2,\cdots,n$ を入れて足し合わせると,（階差数列から数列の一般項を出す公式に入れると）
$\dfrac{f(n)}{n!}=\dfrac{(-1)^2}{2!}+\dfrac{(-1)^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqq2)$

$f(0)=1$ と決めれば，$\dfrac{f(n)}{n!}=\dfrac{1}{0!}-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqq 0)$

はからずも，これで完全順列の確率が出ている。

$f(0)=1, f(1)=1!\left\{\dfrac{1}{0!}-\dfrac{1}{1!}\right\}=0, f(2)=2!\cdot\dfrac{1}{2!}=1, f(3)=3!\left\{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right\}=2$

$f(4)=4!\left\{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}\right\}=9, f(5)=5!\left\{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right\}=44$

普通ここまで，高校では終わるのだが，**テイラー展開**をやっていたとすると，完全順列の確率の極限がわかることになる。

$\dfrac{f(n)}{n!}=\dfrac{1}{0!}-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\quad(n\geqq 0)$

これを，$n\to\infty$ とすると，

$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ とよく似ているので使う気になって

$e^{-x}=1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ に 1 を代入して $e^{-1}=1-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots$ できすぎだ。

さらに，この確率分布（n 個の変換の不動点の個数）の期待値と分散が n にかかわらず，双方とも 1 となる。これを証明しよう。

変換後に一致する数字の個数	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$	n	計
その変換の数	$f(n)$	${}_n\mathrm{C}_1\cdot f(n-1)$		${}_n\mathrm{C}_k\cdot f(n-k)$		0	1	$n!$

$f(1)=0$ なので，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot f(n-k)=n!\cdots$①

期待値は $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k\cdot f(n-k)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k!}f(n-k)=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}n\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}f(n-k)$

$\displaystyle=\frac{1}{n!}n\sum_{k-1=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!}f((n-1)-(k-1))=\frac{1}{n!}n\sum_{k-1=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}f((n-1)-(k-1))$

$=\dfrac{1}{n!}n\cdot(n-1)!=\dfrac{1}{n!}n!=1$（$\because$ ①で n を $n-1$ にしたもの）

同様に，分散は $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot{}_n\mathrm{C}_k\cdot f(n-k)=\frac{1}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!k!}f(n-k)+\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k!}f(n-k)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{n!}\left\{n(n-1)\sum_{k-2=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}f(n-k)+\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k!}f(n-k)\right\}=\frac{1}{n!}(n!+n!)=2$

ここから平均の 2 乗を引いて 1。

この証明は，2 項分布の平均値と分散を出す計算を参考にできたものだ。ついでだから，その証明も振り返っておく。似ているので平均のみ。

$p(k)={}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}$ のとき，$\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}=(p+q)^n=1$

$\displaystyle\sum_{r=0}^{n}r\cdot{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}=r\sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{(n-r)!r!}p^rq^{n-r}=np\sum_{r-1=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}p^{r-1}q^{n-r}=np\sum_{r-1=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}p^{r-1}q^{n-r}$

$=np(p+q)^{n-1}=np$

昔は微分を使った証明の方が普通だった。

$\displaystyle(x+q)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^rq^{n-r}$ 微分して $\displaystyle n(x+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}r{}_n\mathrm{C}_rx^{r-1}q^{n-r}$ x に p を代入して

$\displaystyle n=\sum_{r=0}^{n}r{}_n\mathrm{C}_rp^{r-1}q^{n-r}$ 両辺に p をかけて $\displaystyle np=\sum_{r=0}^{n}r{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}$

分散は 2 回微分するわけだ。**母関数**の微分という方法は，上の完全順列でも使えるのだろうか？つまり，完全順列の母関数は何だろうか？というのが残る課題。

ところで，n によらず，平均がいつも 1 ということは，例えば**席替え**をすると，前と同じ席になるのはまあ 1 人いるだろう，ということになる。これは実際に（席替えをするたびに調べてみると）よく合っている。