多重三角関数

なんとなく市立図書館で目に付いた本が「多重三角関数論講義」，聞いたことないなあ，と思いきや，なんと積年の不明問題があるじゃないか。しかも東工大の入試問題として過去に出題されている。

1990 東工大後期

n を 2 以上の整数とする。

(1) $n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ ですべての実数 θ に対して

$\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta), \cos(2n\theta)=Q_n(\sin^2\theta)$ を満たすものが存在することを

帰納法を用いて表せ。

(2) $k=1,2,\cdots,n-1$ に対して

$a_k=\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$ とおくと，$P_n(x)=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$ となることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\frac{2n^2-2}{3}$ を示せ。

(1)(i) $n=2$ のとき，

$\sin4\theta=2\sin2\theta\cos2\theta=2\sin2\theta(1-2\sin^2\theta)$ よって，$P_2(x)=1-2x$（1 次式）

$\cos4\theta=1-2\sin^22\theta=1-2(4\sin^2\theta\cos^2\theta)=1-8\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=8\sin^4\theta-8\sin^2\theta+1$

よって，$Q_2(x)=8x^2-8x+1$（2 次式）

(ii) $n=k$ まで，$P_k(x)$,（$k-1$ 次式）$Q_k(x)$（k 次式）が存在したとする。

$\sin2(k+1)\theta=(k+1)\sin2\theta P_{k+1}(\sin^2\theta)$

(左辺) $=\sin2k\theta\cos2\theta+\cos2k\theta\sin2\theta=k\sin2\theta P_k(\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)+Q_k(\sin^2\theta)\sin2\theta$

よって，$P_{k+1}(x)=\dfrac{1}{k+1}\{kP_k(x)(1-2x)+Q_k(x)\}\cdots$①（$k$ 次式）

$\cos2(k+1)\theta=Q_{k+1}(\sin^2\theta)$

(左辺) $=\cos2k\theta\cos2\theta-\sin2k\theta\sin2\theta=Q_k(\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)-k\sin^22\theta P_k(\sin^2\theta)$

$=Q_k(\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)-4k\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)P_k(\sin^2\theta)$

よって，$Q_{k+1}(x)=Q_k(x)(1-2x)-4kx(1-x)P_k(x)\cdots$②（$k+1$ 次式）

P_{k+1},Q_{k+1} も存在する。(i)(ii) より題意は示された。

(1) については $n=1$ も定義できるので出しておくと，$P_1(x)=1, Q_1(x)=1-2x$

(2) まず，$\dfrac{1}{\alpha_k}=\sin^2\dfrac{k\pi}{2n}$ は $\theta=\dfrac{k\pi}{2n}$ のとき，$\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)$ より $P_n(x)=0$ の解である。次に $P_n(x)$ の定数項が 1 であることをいえば，題意は示される。

$Q_1(0)=1$, ②より $Q_{k+1}(0)=Q_k(0)$ つまり $Q_n(0)=1$

$P_1(0)=1$, ①より $P_{k+1}(0)=\dfrac{1}{k+1}\{kP_k(0)+Q_k(0)\}$ ここで $P_k(0)=1$ とすれば $P_{k+1}(0)=1$

つまり $P_n(0)=1$

(3) $P_n(x)$ の 1 次の係数が $-\dfrac{2}{3}(n^2-1)=-\dfrac{2}{3}(n-1)(n+1)$ であることをいえばよい。

$P_n(x), Q_n(x)$ の定数項は 1 であることに注意して，$Q_n(x)$ の 1 次の係数を q_n とおくと

$q_1=-2$, ②より $q_{k+1}=q_k-2-4k$

$n\geqq2$ のとき $q_n=q_1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2(2k+1)=-2-2\left\{2\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)\right\}=-2n^2$（$n=1$ のときも成立）

$p_1=0$, ①より（P_{k+1}の 1 次の係数）$=\dfrac{1}{k+1}\left\{-\dfrac{2}{3}(k^2-1)k-2k-2k^2\right\}=-\dfrac{2k}{3(k+1)}(k^2-1+3+3k)$

$= -\dfrac{2k}{3(k+1)}(k+1)(k+2) = -\dfrac{2k}{3}(k+2) = -\dfrac{2}{3}k(k+2)$ よって，題意は証明できた。

入試問題はここまでですが，これを使うと，バーゼル問題の答えが出ると本には出てます。この問題, 本当はこれをやりたかったのか。

バーゼル問題

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

教科書にあるように $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ から，$\dfrac{1}{\sin^2\theta} \geqq \dfrac{1}{\theta^2} \geqq \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} - 1$

よって，$\dfrac{1}{\theta^2} \leqq \dfrac{1}{\sin^2\theta} \leqq 1 + \dfrac{1}{\theta^2}$　これから，$\dfrac{4n^2}{k^2\pi^2} \leqq \dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right)^2} \leqq 1 + \dfrac{4n^2}{k^2\pi^2}$

$k = 1, \cdots, n-1$ で足し合わせて，$\dfrac{4n^2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \leqq \frac{2}{3}(n^2-1) \leqq n - 1 + \frac{4n^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$

$\dfrac{\pi^2}{4n^2}\left\{\dfrac{2}{3}(n^2-1) - n + 1\right\} \leqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \leqq \frac{\pi^2}{4n^2}\frac{2}{3}(n^2-1)$ ここで，$n \to \infty$ として，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

さあ，ここからです。積年の問題というのは,

三角関数の積

$$\prod_{k=1}^{n} 2\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

例えば，$\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\dfrac{\pi}{5}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}, \cdots$ すごいでしょう。この証明がこれで，できました。

$P_n(x)$ の最高次数の係数を調べると，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$

$P_n(x)$ の最高次数（$n-1$ 次）の係数，$Q_n(x)$ の最高次数（n 次）の係数を，それぞれ p_n, q_n とおくと

$p_1 = 1, q_1 = -2$,①,②から，$p_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(-2np_n + q_n), q_{n+1} = -2q_n + 4np_n$ この漸化式を解けばいい。

$(n+1)p_{n+1} = -2np_n + q_n \cdots$③$, q_{n+1} = -2q_n + 4np_n \cdots$④

$2\times$③$+$④ より，$2(n+1)p_{n+1} + q_{n+1} = 0$ よって，$2np_n + q_n = 0$ つまり，$q_n = -2np_n$ ③へ代入して，

$(n+1)p_{n+1} = -4np_n$ よって，$np_n = (-4)^{n-1}$ つまり，$p_n = \dfrac{(-4)^{n-1}}{n}$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2} = \frac{(-4)^{n-1}}{n}$ つまり，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

ここで，$\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2n} = \cos\dfrac{k\pi}{2n}$ なので，n が奇数のとき，$\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2n}\cdot\sin\dfrac{k\pi}{2n} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{k\pi}{n}$

n を新たに $2n+1$ とおいて整理すると，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^{2n}}$

できた，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}2\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$

本では入試問題のように帰納法でやらせてますが，漸化式で解いたのが私の方法（帰納法嫌いなんだよな)。「三角関数パズル」というプリントに，この証明の $n=2$ のときだけを代数的にしてます。思えば加法定理か，幾何的に証明を考えればこうなるか。

ついでに, さらにすごい公式を紹介しよう。

倍角公式

$$2\sin n\theta=\prod_{k=0}^{n-1}2\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$$

これも本はあっさりと結果だけだけど，和を積にしたりと実際に計算してみた。

上の考察から $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\right)=\frac{\sin 2n\theta}{n\sin 2\theta},\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{n}{4^{n-1}}$

変形して $\displaystyle\sin 2\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\sin^2\frac{k\pi}{2n}-\sin^2\theta)=\frac{\sin 2n\theta}{n}\prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n}=\sin 2n\theta\frac{1}{4^{n-1}}$

$$\sin 2\theta\prod_{k=1}^{n-1}4(\sin^2\frac{k\pi}{2n}-\sin^2\theta)=\sin 2\theta\prod_{k=1}^{n-1}2(1-\cos\frac{k\pi}{n}-1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\prod_{k=1}^{n-1}4\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{2n}\right)\sin\left(-\theta+\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$$=\sin 2\theta\prod_{k=1}^{n-1}4\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\frac{k\pi}{2n}\right)=\sin 2\theta\prod_{k=1}^{n-1}4\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{2n}\right)\cos\left(\theta+\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$\displaystyle=\sin 2\theta\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\left(2\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$ 新たに 2θ を θ と置き換えて,

$$2\sin n\theta=2\sin\theta\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}2\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$$

例えば，$2\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\theta\cos\theta$

$2\sin 3\theta=2\sin\theta\cdot 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$　すご。

「多重三角関数論　講義」は，こんな初等的な内容はここだけで，本来ガンマ関数とゼータ関数から多重三角関数を定義するという高度なもの，すぐ返却しました。

ところが，いつもの「数学かんどころ」シリーズ「複素数と複素数平面」を借りて見ていると，積年の問題が簡単に証明してある。

$z^n=1$ から，$(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)=0$

$f(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1$ とおくと,

$f(z)=0$ の解は,

$\alpha_k=\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)$

$(k=1,2,\cdots n-1)$

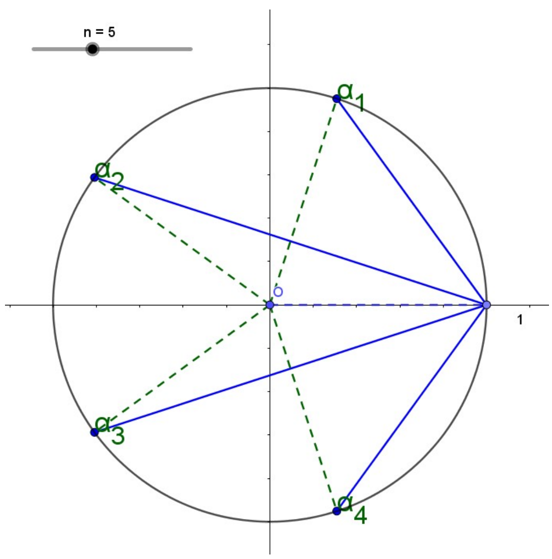
$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{n-1})$

ここで z に 1 を代入し,

$|f(1)|=|1-\alpha_1||1-\alpha_2|\cdots|1-\alpha_{n-1}|=n$

図の線の長さの積が n ,

これで上の証明にもなっている。



何故なら，$|1-\alpha_k|=\sqrt{\left\{1-\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\right\}^2+\sin^2\left(k\frac{2\pi}{n}\right)}=\sqrt{2\left\{1-\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\right\}}=2\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)$

新たに n を奇数として，上の証明もすぐ。

なんと，こんなに簡単にできたのか，ということでした。