高等教育代数学　の最近見かけないものと極端に複雑でないものだけ取り上げて

なるべく高木さんの言い回しで，旧漢字とかは直すとこもあります。

1 章 実数，文字の使用

2 章　整式 及 其四則

対称式と交代式

交代式 $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$ の利用

$a=b$ とすると式の値は 0 となり，a, b, c について対称，つまり，Δ で割り切れる。

例 1. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

2 次式だから 0 しかない。

例 2. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

3 次同次式だから，係数だけ決めればいい。例えば a^2 の係数は $(b-c)$

例 3. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

4 次同次式だから，残る因数は 1 次同次式，しかも対称式だから $(a+b+c)$ しかない。

あとは 3 乗の係数で決定。

例 4. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

3 次同次式だから，係数だけ決めればいい。例えば a^2 の係数は $(b-c)$

例 5. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

5 次同次式だから，残る因数は 2 次同次式，しかも対称だから $m(a^2+b^2+c^2)+n(bc+ca+ab)$ として，m, n 決定。まあ a について整理して，$(b-c)$ の共通因数をみつけ，あとは $a-c, a-b$ で割っていってもいい。

$$
\begin{array}{cccccc}
c) & b+c & -b^2-bc-c^2 & 0 & b^2c^2 \\
 & & bc+c^2 & -b^2c & -b^2c^2 \\
\hline
b) & b+c & -b^2 & -b^2c & (0 \\
 & & b^2+bc & b^2c & \\
\hline
 & b+c & bc & (0 &
\end{array}
$$

$(b-c)(a-c)(a-b)\{(b+c)a+bc\}=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

例 6. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$

$b+c$ の共通因数を見つけて普通に因数分解してもいいが，$a+b=0$ のとき式の値が 0 で，対称だから，$(a+b)(b+c)(a+b)$ で割れる，として係数を比べる。

例 7. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

例 6. を使って，$a+b+c=s$ とおくと

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)-3abc=s^3-3(s-a)(s-b)(s-c)-3abc$

$=s^3-\{s^3-(a+b+c)s^2+(bc+ca+ab)s-abc\}-3abc=s^3-3(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)\}=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

例 8. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y)$

$a=y-z, b=z-x, c=x-y$ とすると $a+b+c=0$ より，例 6. を使う。

3 章　分数式

オイラーの公式 昔はよくやった。通分すると前章の例 1. から例 3. まで使うことになって

$$E(0)=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

$$E(1)=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

$$E(2)=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$$

$$E(3)=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$$

例 1. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}\dfrac{b^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\dfrac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

(左辺) $=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left\{E(2)x^2+\left(\dfrac{(b+c)a^2}{(a-b)(a-c)}+\cdots\right)x+abcE(1)\right\}$

ところで $\left(\dfrac{(b+c)a^2}{(a-b)(a-c)}+\cdots\right)=(a+b+c)E(2)-E(3)=0$

例 2. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{abc}$

(左辺) $=\dfrac{1}{abc}\left\{\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}\right\}$

前章の例 4. を使う。

例 3. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}=\dfrac{bc+ca+ab}{(abc)^2}$

前章の例 5. を使う。

加比の理

例 4.　$\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$ のとき $\dfrac{ay-bx}{a-b}$ は同じ値で $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$

$$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{a(bz-cy)+b(cx-az)}{a(b-c)+b(c-a)}=\frac{ay-bx}{a-b}$$

$$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{ay-bx}{a-b}=\frac{bz-cy+cx-az+ay-bx}{b-c+c-a+a-b}$$

$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=ay-az+bz-bx+cx-cy=bz-cy+cx-az+ay-bx=0$

比の値を k とおく方法で十分できる。

4 章 根数，根式及び虚数　　　　　で，第 1 編　緒論　が終わる。

第 2 編　1 次方程式

第 3 編　2 次方程式

第 4 編　不等式

第 5 編　代数式の数値の変動

と続く。

第 5 章　一元一次方程式

例 1. $\dfrac{a^2(b+c-x)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(c+a-x)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(a+b-x)}{(c-a)(c-b)}=x-(a+b+c)$ を解け。

$-E(2)x-\dfrac{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=x-(a+b+c)$

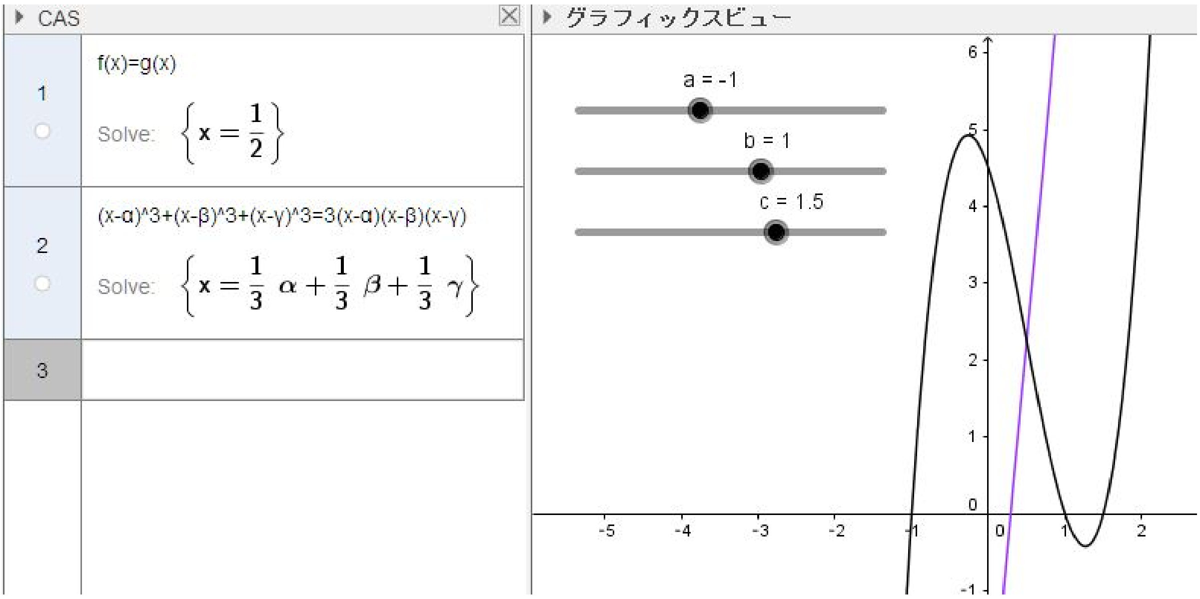
$x=\dfrac{a+b+c}{2}$

例 2. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$ を解け。

移項して $a^3+b^3+c^3-3abc=$ の公式で因数分解 $(3x-a-b-c)\{(x-a)^2+(x-b)^2+\cdots\}=0$

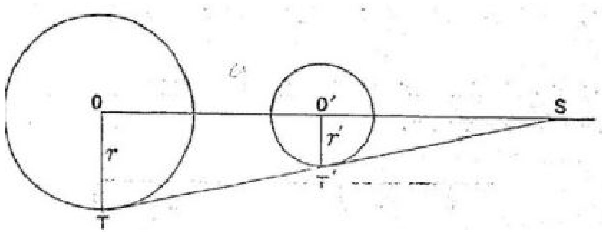
$(x-a)^2+(x-b)^2+\cdots=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ なので

$a=b=c$ のとき 不定，それ以外のとき $x=\dfrac{a+b+c}{3}$



そろそろ目で楽しみながら行きますか。2 つの 3 次関数の交点です。Geogebra はグラフをかくときに，具体的に a, b, c を決めるので，文字で方程式を解くために別の文字 (α, β, γ) を使ってます。

例 3. 半径が r, r' なる 2 つの円の中心 O,O' の距離を a とす。今 OO' の延長線と，下図の如き位置にある共通切線（昔はこう書いたのか）TT' との交点を S とせば，OS の長さは幾許（いくばく）なるべきか。



（そのままの図）

$x:r=(x-a):r'$ より $xr'=r(x-a)$ なので $(r-r')x=ar$ つまり $x=\dfrac{ar}{r-r'}$

いろいろな場合で $r=r'$ とか 不能不定問題はあるが，図形的にあまり意味は無いようだ。

例 4. $\dfrac{a}{x-a} - \dfrac{b}{x-b} = \dfrac{a-b}{x}$ を解け。

式の形から $x \neq a, b, 0$，分母を払って整理すると　$(a^2 - b^2)x = (a-b)ab$

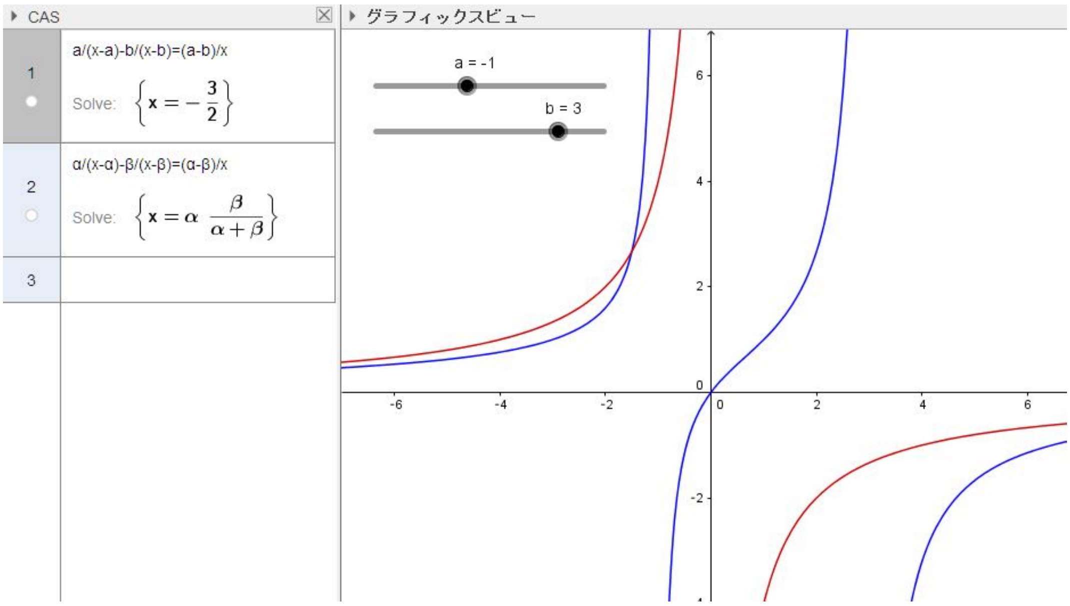
(i) $a = b$ のとき不定

(ii) $a \neq b$ のとき $(a+b)x = ab$

(ii)-(i) $a + b \neq 0$ のとき $x = \dfrac{ab}{a+b}$

(ii)-(ii) $a + b = 0, ab \neq 0$ のとき，つまり $a + b = 0$ で $a = b = 0$ を除くとき　不能

(ii)-(iii) $a + b = 0, ab = 0$ のとき，つまり $a = b = 0$ のとき　不定　これは (i) に含まれる。



第 6 章　連立一次方程式

昔は「連」（車がつながる象形）でなく，「聯」（敵の耳を糸でつなげる象形）を使っていたのだ。

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} b & c & a & b \\ b' & c' & a' & b' \end{matrix}$$

$D_1 = bc' - b'c, D_2 = ca' - c'a, D_3 = ab' - a'b$ とおくと $x = \dfrac{D_1}{D_3}, y = \dfrac{D_2}{D_3}$

D_3 を（3 元の場合と同様に）デターミナント。行列だよな，やっぱり

例 1. $\begin{cases} x + y = 2a \\ (a-b)x = (a+b)y \end{cases}$ を解け。

$D_3 = -(a+b) - (a-b) = -2a \neq 0$ つまり $a \neq 0$ のとき，$x = a + b, y = a - b$

$a = 0$ のとき，不定 $x + y = 0$

これを $x = a + t$ とおけば $y = a - t$,$(a-b)(a+t) = (a+b)(a-t)$ から $2a(t-1) = 0$ で $t = 1$ のように

「x, y の中一方を以て他の一方を表す代わりに，此の如く両者を共に第三の未知数にて表すことは，これを巧みに応用すれば，多くの場合に於いて甚だ便利なり」

例 2. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2ab} = \dfrac{x+y}{a^2+b^2} \\ \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a \end{cases}$ を解け。

$x + y = 2t(a^2 + b^2), x - y = 2t2ab$ とおくと $x = t(a+b)^2, y = t(a-b)^2$ 他式より $t = 1$

例 3. $\begin{cases} bx + ay = 2ab \\ a^2x + b^2y = a^3 + b^3 \end{cases}$ を解け。

$b(x-a) + a(y-b) = 0, a^2(x-a) + b^2(y-b) = 0$ と変形すれば，$a \neq b$ のとき，$x = a, y = b$

$a = b$ のとき，不定 $x + y = 2a$

3 元も「臨機特別の工夫を用いて，計算を簡単ならしめ得べき場合を示さんとす。」

例 4. $\begin{cases} y+z-kx=2a \\ z+x-ky=2b \\ x+y-kz=2c \end{cases}$ を解け。

すべて加えて因数分解すると，$(2-k)(x+y+z)=2(a+b+c)$

(i)$k=2$ のとき，(i)-(i) $a+b+c\neq 0$ のとき，不能

(i)-(ii) $a+b+c=0$ のとき，不定 $\begin{cases} y+z-2x=2a \\ z+x-2y=2b \\ x+y-2z=2c \end{cases}$ より $x+y+z-3x=2a$ つまり $\dfrac{x+y+z}{3}-x=\dfrac{2}{3}a$

$\dfrac{x+y+z}{3}=t$ とおくと，$x=t-\dfrac{2}{3}a, y=t-\dfrac{2}{3}b, z=t-\dfrac{2}{3}c$

(ii)$k\neq 2$ のとき，$x+y+z=\dfrac{2(a+b+c)}{2-k}$ を使って

(ii)-(i) $k\neq -1$ のとき，$x=\dfrac{2\{(k-1)a+b+c\}}{(1+k)(2-k)},\cdots$

(ii)-(ii) $k=-1$ のとき，$\begin{cases} y+z+x=2a \\ z+x+y=2b \\ x+y+z=2c \end{cases}$ $a=b=c$ でないとき不能，$a=b=c$ のとき不定 $x+y+z=2a$

例 5. $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ ax+by+cz=bc+ca+ab \\ bcx+cay+abz=3abc \end{cases}$ を解け。(ただし，a,b,c はすべて異なる数)

まあ代入すれば解けるが，上の考え方をうまく使っているなあと思ったので，方法を紹介しよう。

$x-a=x', y-b=y', z-c=z'$ とおくと，$\begin{cases} x'+y'+z'=0\cdots① \\ ax'+by'+cz'=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab\cdots② \\ bcx'+cay'+abz'=0\cdots③ \end{cases}$

①,③より，$x=a(b-c)t, y=b(c-a)t, z=c(a-b)t$ というのが，第 4 の未知数で表す方法。

② をみたすように t を決めれば，$x=\dfrac{-a(b-c)^2}{(a-b)(a-c)},\cdots$ 確かに代入するよりいい。

例 6. $\begin{cases} ax=by=cz=du\cdots① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{m} \end{cases}$

①を t とおくと，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{a}{t},\cdots$ を②へ代入して t が決定。よって，$x=\dfrac{m(a+b+c+d)}{a},\cdots$

例 7. $\begin{cases} y+2z+3u+4v=a \\ z+2u+3v+4x=b \\ u+2v+3x+4y=c \\ v+2x+3y+4z=d \\ x+2y+3z+4u=e \end{cases}$ を解け。

こんなのは，数学オリンピックの予選で見たことある。

全て足して $10(x+y+z+u+v)=a+b+c+d+e=10f$ とおく。

上の式から下の式を引くと，$\begin{cases} y+z+u+v-4x=a-b \\ z+u+v+x-4y=b-c \\ u+v+x+y-4z=c-d \\ v+x+y+z-4u=d-e \end{cases}$ よって，$x=5b-a+f,\cdots$

例 8. $\begin{cases} x-y=a-b\cdots ① \\ \dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}=1\cdots ② \\ \dfrac{x}{a-\lambda}+\dfrac{y}{b-\lambda}=1\cdots ③ \end{cases}$ は並立することを得るか。ただし，$\lambda \neq 0$

②③ より $\dfrac{x}{a^2-\lambda^2}=-\dfrac{y}{b^2-\lambda^2}$ これを t とおいて，②に代入。$(a-b)t=1$

$a \neq b$ が必要で $x=\dfrac{a^2-\lambda^2}{a-b}, y=-\dfrac{b^2-\lambda^2}{a-b}$ これを ① に代入すると，$\lambda^2=ab$ このとき，並立することを得る。

Lagrange の補間式に面白いところがあったので，

剰余の定理の拡張 a,b,c がことごとく相異なる数なるとき，

x の整式 $f(x)$ を $(x-a)(x-b)(x-c)$ にて除した剰余は

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c)+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

これは確かに a を代入すると $f(a)$，b を代入すると $f(b)$，c を代入すると $f(c)$ の 2 次式。

この辺でオイラーの分数式が出てきたのかもしれないな。

第 7 章　1 次方程式の応用問題　で 3 篇に

第 8 章　1 元 2 次方程式

「2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の 2 つの根 α,β の対称式は，これを p,q の有理式として表すことを得。」として，証明してあります。

まず「$\alpha^n+\beta^n$ の如き総和が p,q の有理式として表し得ることを示さば足れり」として，**ニュートンの公式**。

$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とすると，$s_0=2, s_1=p$

$\alpha^n-p\alpha^{n-1}+q\alpha^{n-2}=0, \beta^n-p\beta^{n-1}+q\beta^{n-2}=0$ より，$s_n=ps_{n-1}-qs_{n-2}$

ついでに，$d_n=\alpha^n-\beta^n$ とすると $(\alpha>\beta)$，$d_0=0, d_1=\sqrt{D}, d_n=pd_{n-1}-ds_{n-2}$

解と係数の関係の問題として

例 1. $ax^2+bx+c=0$ の解を $x=x_1,x_2$ とすると，$\dfrac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta}, \dfrac{\alpha x_2+\beta}{\gamma x_2+\delta}$ を解とする 2 次方程式を作れ。

この本は，解と係数の関係を使って解いてますが，変数変換の問題として解くと，

$y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ とおいて y のみたすべき方程式を求めればいいので，$x=\dfrac{\delta y-\beta}{-\gamma y+\alpha}$ を元の方程式に代入して整理すればいい。

$a(\delta x-\beta)^2+b(\delta x-beta)(-\gamma x+a)+c(\gamma x+\alpha)^2=0$ を整理。

この方程式と元の方程式との判別式を Δ, D とすれば，$\Delta=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 D$ これは「有名なる関係」なんだって。ここらへんも行列だよな。

2 つの 2 次方程式の共通解の問題を，公式（**レズルタント「終結式」**）で説明してます。

連立 2 次方程式 $\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases}$ を $\begin{cases} ay+bx+c=0 \\ a'y+b'x+c'=0 \end{cases}$ として，$y=x^2$ が成り立てばいい。

$A=bc'-cb', B=ca'-ac', C=ab'-ba'$ とすれば，$C \neq 0$ のとき，$y=\dfrac{A}{C}, x=\dfrac{B}{C}$

よって，$\Delta=B^2-AC=0$ これをレズルタントという。

第 9 章　1 元 2 次方程式に帰着する方程式

例 1. $\dfrac{b+c}{bc-x}+\dfrac{c+a}{ca-x}+\dfrac{a+b}{ab-x}=\dfrac{a+b+c}{x}$ を解け。ただし $a+b+c\neq 0$ とする。

これは分母を払って整理してもなかなか複雑。数学オリンピック予選にちょどいい。

$\dfrac{b+c}{bc-x}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{c+a}{ca-x}-\dfrac{b}{x}+\dfrac{a+b}{ab-x}-\dfrac{c}{x}=0$

$\dfrac{(a+b+c)x-abc}{x}\left(\dfrac{1}{bc-x}+\dfrac{1}{ca-x}+\dfrac{1}{ab-x}\right)=0$ で，$x=\dfrac{abc}{a+b+c}$ が見つかり

$(x-ac)(x-ab)+(x-bc)(x-ab)+(x-bc)(x-ca)=0$

つまり，$3x^2-2(bc+ca+ab)x+abc(a+b+c)=0$ を解いて $x=\dfrac{bc+ca+ab\pm\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)}}{3}$

例 2. $x^4-4(a+b)x^2+16(a-b)^2=0$ を解け。

$x^2=2(a+b)\pm 2\sqrt{(a+b)^2-4(a-b)^2}=2(a+b)\pm 2\sqrt{(3a-b)(-a+3b)}$

$x=\pm\sqrt{2(a+b)\pm 2\sqrt{(3a-b)(-a+3b)}}=\pm\sqrt{3a-b}\pm\sqrt{-a+3b}$　(複号同順ではない)

例 3. $x^2=A\pm\sqrt{Q}$ を考えると，$x^4-2Ax^2+A^2-Q=0$ を解くことになり，

これを複 2 次式の方法で解いていくと，$x^4-2\sqrt{A^2-Q}x^2+A^2-Q=2Ax^2-2\sqrt{A^2-Q}x^2$

つまり，$(x^2-\sqrt{A^2-Q})^2=2(A-\sqrt{A^2-Q})x^2$ で $x^2-\sqrt{A^2-Q}=\pm\sqrt{2(A-\sqrt{A^2-Q})}x$

$x^2-\pm\sqrt{2(A-\sqrt{A^2-Q})}x-\sqrt{A^2-Q}=0$ を解の公式で解いて，

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\pm\sqrt{A+\sqrt{A^2-Q}}\pm\sqrt{A-\sqrt{A^2-Q}}\right\}$ これが，$\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ （集合として 4 個）

ここで，$Q=-B^2$ とおくと，$\sqrt{A\pm Bi}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\pm\sqrt{A+\sqrt{A^2+B^2}}\pm i\sqrt{A-\sqrt{A^2+B^2}}\right\}$

「複素数の平方根は亦 1 つの複素数なりという事実の，如何に重要なるかを想え。」

今でいう相反方程式は，昔は逆数方程式と言ったらしい。

で,「逆数方程式の応用として最重要なるは，1 の冪根を求むる方程式なり」

$x^3=1$ の解は $1,\omega,\omega^2$ $x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)$

これより，$x^2+xy+y^2=(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=(a+b\omega+\omega^2 c)(a+b\omega^2+\omega c)$

1 の 5 乗根くらいまで，逆数方程式で解いてます。

例 4. $\dfrac{b(a-x)^3-a(b-x)^3}{x}=(a-x)^3-(b-x)^3$ を解け。

分母を払った式は 3 次式で，$x=a,b,\dfrac{a+b}{2}$ は明らかに解。

第 10 章　連立 2 次方程式

例 1. $\begin{cases} x^2+2xy-y^2=a^2+2a-1\cdots① \\ (a-1)x(x+y)=a(a+1)y(x-y)\cdots② \end{cases}$ を解け。

手頃。② が因数分解できて，$(x-ay)\{(a-1)x-(a+1)y\}=0$

(i) $x=ay$ のとき，①より $(a^2+2a-1)(y^2-1)=0$

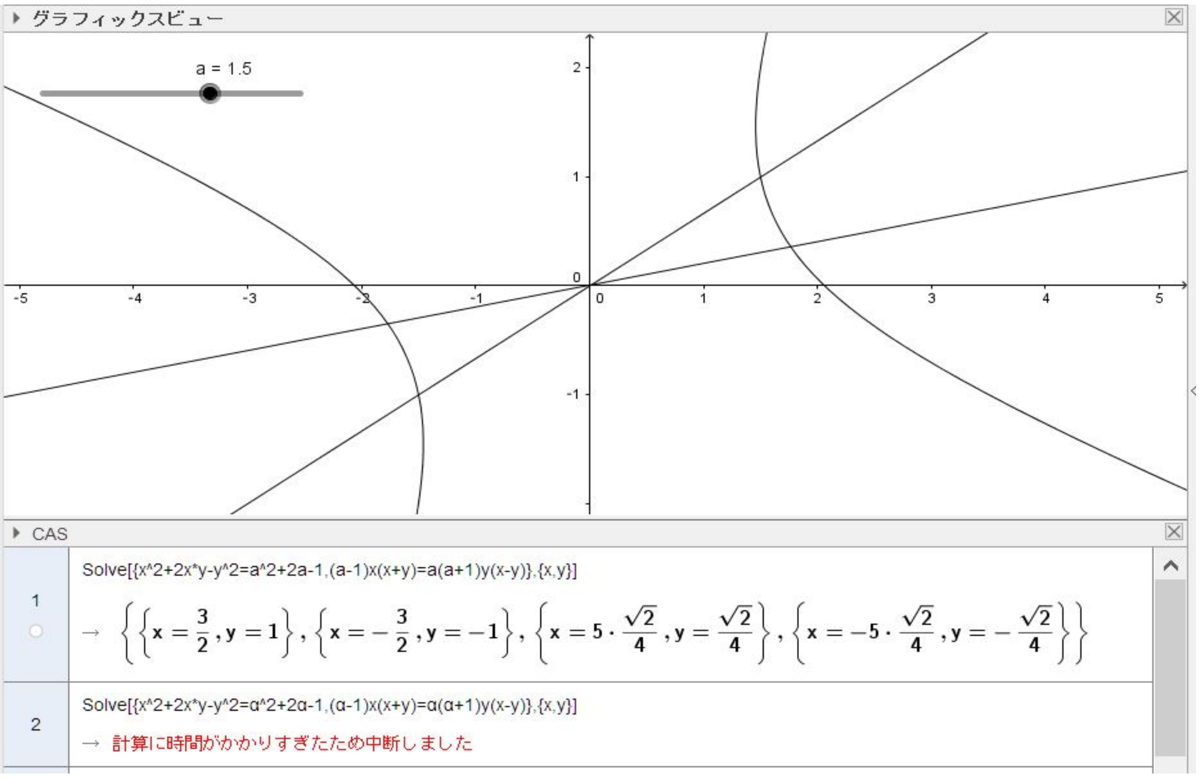
(i)-(i) $a^2+2a-1=0$ のとき， y 不定,$x=ay$

(i)-(ii) $a^2+2a-1\neq 0$ のとき，$x=\pm a, y\pm 1$（複号同順）

(ii) $x=(a+1)t, y=(a-1)t$（この方法がいいですね） のとき，①より $(a^2+2a-1)(2t^2-1)=0$

(ii)-(i) $a^2+2a-1=0$ のとき， t 不定,$(a-1)x-(a+1)y=0$

(ii)-(ii) $a^2+2a-1\neq 0$ のとき，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+1), y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a-1)$（複号同順）



様子が目で見えます。$a^2+2a-1=0$ のとき，双曲線が漸近線に分解するわけです。片方が一次式（2 直線）に分解できる例。さすがに，文字そのままでは解いてくれなかったが。

Maxima はさらっと解いてます。ところで Geogebra と Maxima は，大文字とか小文字とか（Solve と solve）括弧が違う（(),[],）とか，命令が微妙に違い，うっとうしいです。

```
solve([x^2+2*x*y-y^2=a^2+2*a-1, (a-1)*x*(x+y)=a*(a+1)*y*(x-y)], [x, y]);
```

$$[[x=-\frac{a+1}{\sqrt{2}}, y=-\frac{a-1}{\sqrt{2}}], [x=\frac{a+1}{\sqrt{2}}, y=\frac{a-1}{\sqrt{2}}], [x=a, y=1], [x=-a, y=-1]]$$

2 次式（$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$）が 1 次式に分解できる必要十分条件を，$x$ についての 2 次方程式の，判別式が完全平方式となる条件から,（$\Delta=af^2+bg^2+ch^2-abc-2fgh=0$）作っています。2 次形式論です。

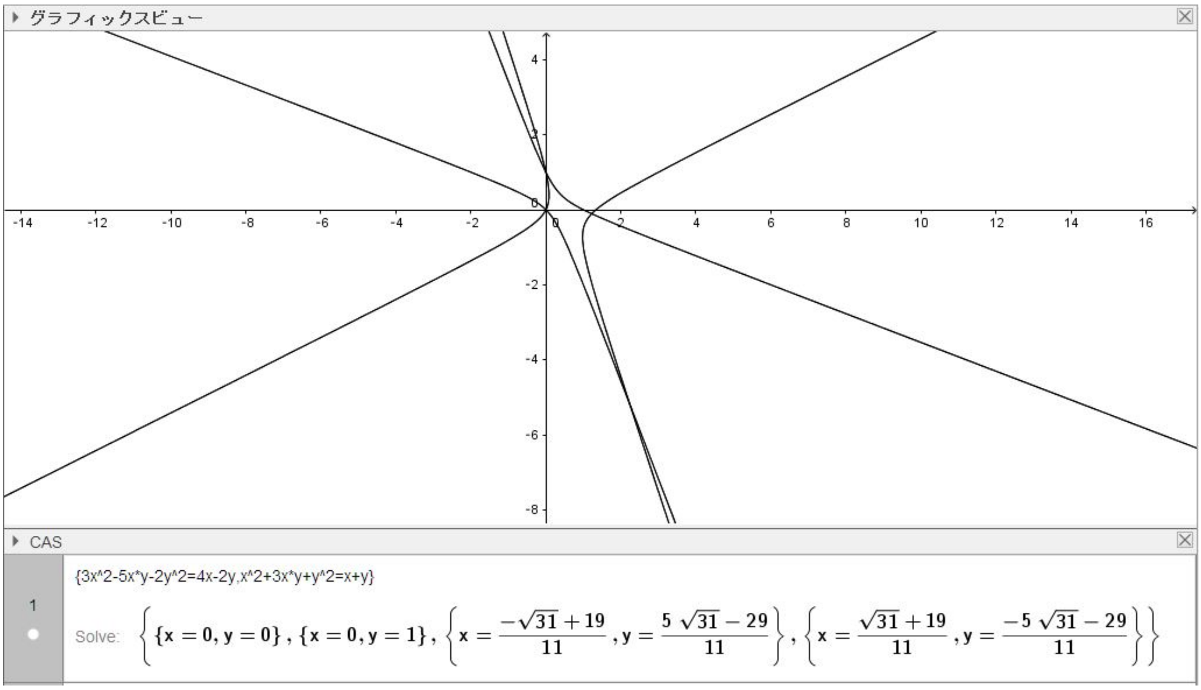
次に片方が 1 次式に分解できない例。

例 2. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=x+y \cdots ① \\ 3x^2-5xy-2y^2=4x-2y \cdots ② \end{cases}$ を解け。

両方使って y を消去すると $6x=5x^2+xy$ （たまたま出来た感じがするけど）

$(x,y)=(0,0),(0,1),\left(\dfrac{19\pm\sqrt{31}}{11},\dfrac{-29\mp5\sqrt{31}}{11}\right)$

難しいんだろうなあ。本文には $(0,1)$ が抜けてます。Maxima では前の 2 つしか答えません。（Geogebra は出るけど，つまり，Geogebra は数字に強く Maxima は文字に強い）



$(0,0)$ を解にもつ連立方程式の一般的な解き方は，$(0,0)$ 以外は $y=ux$ とおいて，u （3 次方程式となる）を求めるとあります。

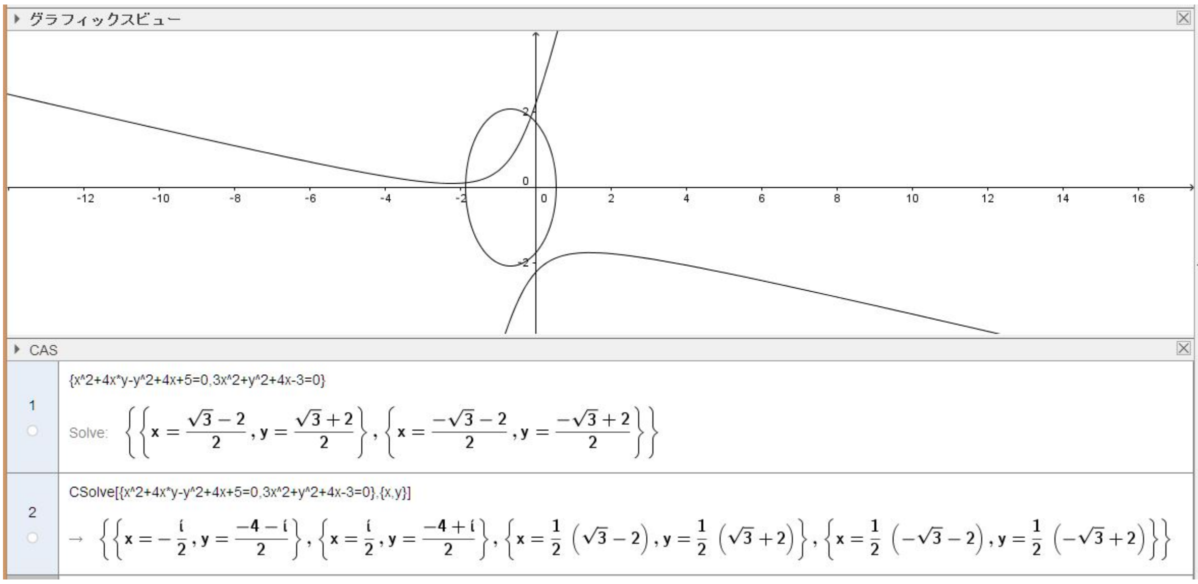
これを図形的に考えると，2 次と 2 次の連立だから交点はあっても 4 つ。原点が解となるので，残りの高々 3 つの交点を結ぶ直線があり，それは $y=ux$ とおける。ということでしょう。

似たような問題を Maxima で解かせると $(0,0)$ のみ，Geogebra では「計算に時間がかかりすぎたため中断しました」だってよ。

$(0,0)$ を解にもたない連立方程式（しかも片方が 1 次式に分解されない）の一般的な解き方は，更に複雑で，$f=0,g=0$ から $f+kg=0$ なる 2 次式を作り，これが 1 次式に分解できるように k を決める。

例 3. $\begin{cases} x^2+4xy-y^2+4x+5=0 \cdots ① \\ 3x^2+y^2+4x-3=0 \cdots ② \end{cases}$ を解け。

上の方法で $k=-1$ を発見し，②から②を引いた式が因数分解できて，$y=-x\pm 2$



2 元 2 次方程式は 1 元 4 次方程式に一般的には帰着され，平方根によって解けるのは極めて特殊な場合だと言ってあり，特に簡単な例を挙げるということで以下の問題。これがなかなか今ではあまり見かけない，しかも難問。

例 4. $\begin{cases} (x+y)(1+xy)=xy \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2)=x^2y^2 \end{cases}$ を解け。

対称式の方法（$x+y=u, xy=v$）で解いて，$(u,v)=(0,0),(-\omega^2,\omega),(-\omega,\omega^2)$ とやっていっても道は長い。下の方法は気が付かなかった。

$(x,y)=(0,0)$ 以外の解は，$x\neq 0, y\neq 0$ なので，xy, x^2y^2 で両辺を割り整理すると，

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+x+y=1, \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+x^2+y^2=1$ よって，$x+\dfrac{1}{x}=X, y+\dfrac{1}{y}=Y$ とおくと

$X+Y=1, X^2+Y^2=5$ 解いて $(X,Y)=(2,-1),(-1,2)$ という手段を経ると楽にできて

$(x,y)=(0,0),(1,\omega),(1,\omega^2),(\omega,1),(\omega^2,1)$

例 5. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^3+y^3+z^3=36 \\ xyz=6 \end{cases}$ を解け。

これは今もよくある，3 次方程式の解と係数で可能。

$yz+zx+xy=11$ を出して，x,y,z は $t^3-6t+11t-6=0$ の解 $t=1,2,3$

例 6. (1) $\begin{cases} (x+y)(x+z)=a^2 \\ (y+z)(y+x)=b^2 \\ (z+x)(z+y)=c^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=a \\ (z+x)(x+y+z)=b \\ (x+y)(x+y+z)=c \end{cases}$ (3) $\begin{cases} yz=by+cz \\ zx=cz+ax \\ xy=ax+by \end{cases}$ を解け。

これらは，全式かけてとか加えてとかいう方法で解けるが，最後のやつは気づかなかった。どうも，「**0 でないときは逆数を考える**」というのは最近見かけない手なんだな。

(1) $(x,y,z)=(\pm\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\right),\cdots$ (2) $(x,y,z)=(\pm\dfrac{b+c-a}{\sqrt{2(a+b+c)}},\cdots$

(3) $(x,y,z)=(0,0,0)$ 以外の解は，$x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$ なので，yz, zx, xy で両辺を割り整理すると，
$\dfrac{b}{z}+\dfrac{c}{y}=1, \dfrac{c}{x}+\dfrac{a}{z}=1, \dfrac{a}{y}+\dfrac{b}{x}=1$ それぞれに $-a, b, c$ をかけて加えると，$\dfrac{2bc}{x}=-a+b+c$
よって，$x=\dfrac{-a+b+c}{2bc}, \cdots$

例 7. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=2xyz$ を解け。
これは Maxima は解いたが，Geogebra は「計算に時間がかかりすぎたため中断しました」ぐらいの難問。
上の練習のおかげで気持ちよく解けました。
$(x,y,z)=(0,0,0)$ 以外の解は，$x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$ なので，xyz で各辺を割り整理すると，
$\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=2a, \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}=2b, \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=2c$ とくれば，$\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=a+b+c$ となり
$\dfrac{1}{yz}=-a+b+c, \dfrac{1}{zx}=a-b+c, \dfrac{1}{xy}=a+b-c$ とくれば，$xyz=\pm\dfrac{1}{\sqrt{D}}$
ただし，$D=(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ よって，$x=\pm\dfrac{-a+b+c}{\sqrt{D}}\cdots$

例 8. $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 \end{cases}$ を解け。
ここまでの特別な工夫ってやつが役に立って，まず $x=a, y=b, z=c$ が明らかな解。
これを，特別な解 0 に移す。つまり $x-a=X, y-b=Y, z-c=Z$ とおくと
$$\begin{cases} X+Y+Z=0\cdots① \\ X^2+Y^2+Z^2+2(aX+bY+cZ)=0\cdots② \\ (b-c)X+(c-a)Y+(a-b)Z=0\cdots③ \end{cases}$$
①から $Z=-X-Y$ を③へ代入して整理すると $(2b-a-c)X=(2a-b-c)Y$
ここで上の工夫 $X=(b+c-2a)t, Y=(c+a-2b)t$ とおけて，$Z=(a+b-2c)t$
②へ代入して t を求めればいい。ちょっと複雑だが　$t=0, \dfrac{2}{3}$
つまり，$(X,Y,Z)=(0,0,0), \left(\dfrac{2}{3}(b+c-2a), \dfrac{2}{3}(c+a-2b), \dfrac{2}{3}(a+b-2c)\right)$
よって，$(X,Y,Z)=(a,b,c), \left(\dfrac{2b+2c-a}{3}, \dfrac{2c+2a-b}{3}, \dfrac{2a+2b-c}{3}\right)$

そして，この章最後の問題。例 8 は Maxima も Geogebra も解けたがこれは駄目でした，難問になるのかな。私も気づけませんでした。

例 9. $\begin{cases} yz+f^2=cy+bz \\ zx+g^2=az+cx \\ xy+h^2=bx+ay \end{cases}$ を解け。
$yz-cy-bz=-f^2$ より $(y-b)(z-c)=bc-f^2$
つまり，$\begin{cases} (y-b)(z-c)=bc-f^2 \\ (z-c)(x-a)=ca-g^2 \\ (x-a)(y-b)=ab-h^2 \end{cases}$ となれば，$(x-a)(y-b)(z-c)=\pm\sqrt{(bc-f^2)(ca-g^2)(ab-h^2)}$
右辺を $\pm\sqrt{M}$ とおけば，$(x,y,z)=\left(a\pm\dfrac{\sqrt{M}}{bc-f^2}, b\pm\dfrac{\sqrt{M}}{ca-g^2}, c\pm\dfrac{\sqrt{M}}{ab-h^2}\right)$

第 11 章　2 次方程式応用問題

第 12 章　不等式の原則

第 13 章　不等式の解法 等式の恒等式と方程式の概念は，不等式では**絶対不等式**と**条件不等式**といった。絶対不等式は今ももっと使っていいと思う、条件不等式というのはあまり聞かない。

1 次分数不等式が強調されている。珍しいのは，2 変数不等式が以下のように解かれているくらいかな。

例 1. 次の不等式を解け。(1) $\begin{cases} 3x-5y>8 \\ x-4y<6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-5y>8 \\ x-4y>6 \end{cases}$

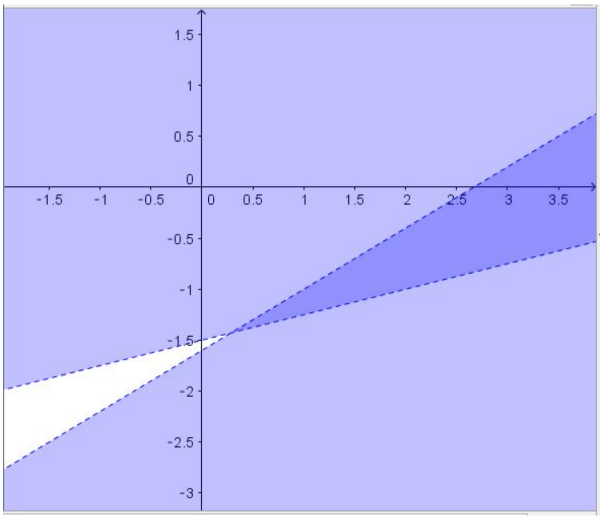
(1) y について解いて $\dfrac{x-6}{4}<y<\dfrac{3x-8}{5}$ これが成り立つためには $\dfrac{x-6}{4}<\dfrac{3x-8}{5}$,
つまり $\dfrac{2}{7}<x$ が必要。よって，$\dfrac{2}{7}<x, \dfrac{x-6}{4}<y<\dfrac{3x-8}{5}$

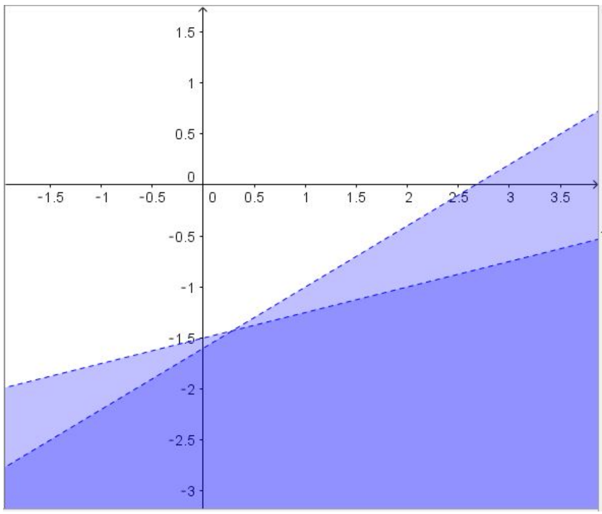
(2) y について解いて $y<\dfrac{x-6}{4}, y<\dfrac{3x-8}{5}$ 場合分けをして

(i) $\dfrac{x-6}{4} \leqq \dfrac{3x-8}{5}$ つまり $\dfrac{2}{7} \leqq x$ のとき $y<\dfrac{x-6}{4}$

(ii) $\dfrac{x-6}{4} > \dfrac{3x-8}{5}$ つまり $\dfrac{2}{7} > x$ のとき $y<\dfrac{3x-8}{5}$

今は平面上の領域とするが，そのほうが分かりやすい。





第 14 章　極大極小

相加・相乗平均の関係

$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ のとき $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときのみ

証明はいろいろな種類があるが，この本のは次のもの。

$n = 2$ は当たり前。n は成り立つとして，$2n$ のとき成り立つのを以下のように証明し，

$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ と $\dfrac{a_1' + a_2' + \cdots + a_n'}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1' a_2' \cdots a_n'}$ から

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1' + a_2' + \cdots + a_n'}{2n} \geqq \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{a_1' + a_2' + \cdots + a_n'}{n}}$$

$$\geqq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_1' a_2' \cdots a_n'}} = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \cdots a_n a_1' a_2' \cdots a_n'}$$

n のとき成立すれば，それよりも小さいときには以下のように成立するのを証明して，どんな n でも成立とする。

$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ で

n より小さい m に対して，$\dfrac{a_1 + \cdots + a_m}{m} = a_0, a_{m+1} = \cdots = a_n = a_0$ とすると

$\dfrac{m a_0 + (n-m) a_0}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_m a_0^{n-m}}$ つまり $a_0^n \geqq a_1 a_2 \cdots a_m a_0^{n-m}$ すなわち $a_0^m \geqq a_1 a_2 \cdots a_m$

よって $\dfrac{a_1 + \cdots + a_m}{m} \geqq \sqrt[m]{a_1 \cdots a_m}$

これから,「極大極小の研究において重要なる次の定理」が成り立つ。

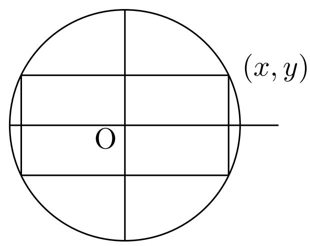
「 n 個の正数の和が定まれるときは，その積が最大なる値を採るは此等 n 個の数が盡く相等しいときなり。次に又、 n 個の正数の積が定まれるときは，その和の最小なるは，此等の n 個の数が盡く相等しいときにあり」

その例として以下の例題。

例 1. 周囲の長さの与えられたる矩形の中，面積の最大なるものは正方形なり。

横，縦それぞれの長さを $x > 0, y > 0$ とすると，$2x + 2y = 4l$（定数）とおけて

$xy \leqq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = l^2$ 等号は $x = y$ のとき，つまり正方形。



例 2. 与えられたる円に内接する矩形の中，面積の最大なるものを求めよ。

図のように $x > 0, y > 0$ とすると，$x^2 + y^2 = r^2$（定数）

$2x2y = 4\sqrt{x^2 y^2} \leqq 4\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2}\right) = 2r^2$

等号は $x = y$ のとき，つまり正方形。

例 3. 表面積の和が与えられたる直角六面体の中，容積の最大なるものは正六面体なり。

横，縦，高さ，それぞれの長さを $x > 0, y > 0, z > 0$ とすると，$2(xy + yz + zx) = 6S$（定数）とおけて

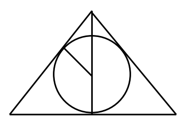
$xyz = (xy \cdot yz \cdot zx)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\dfrac{xy + yz + zx}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = S^{\frac{3}{2}}$ 等号は $x = y = z$ のとき，つまり正六面体（立方体）。

例 4. 与えられたる球に外接する正円錐の中，容積の最小なるものを求む。

底面の半径，高さを，それぞれ $x > 0, y > 0$ とすると，$x : y = r : \sqrt{(y-y)^2 - r^2}$（$r$: 定数）より

$y = \dfrac{2rx^2}{x^2 - r^2}$ なので $\dfrac{1}{3}\pi x^2 y = \dfrac{2\pi r}{3}\dfrac{x^4}{x^2 - r^2}$ 普通なら微分だろうなあ

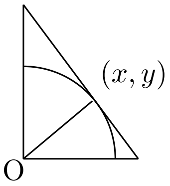
$$\frac{2\pi r}{3}\frac{x^4}{x^2 - r^2} = \frac{2\pi r^3}{3}\frac{1}{\frac{r^2}{x^2}}\frac{1}{1 - \frac{r^2}{x^2}} \geqq \frac{2\pi r^3}{3}\frac{1}{\left(\dfrac{\frac{r^2}{x^2} + 1 - \frac{r^2}{x^2}}{2}\right)^2} = \frac{8\pi r^3}{3}$$



等号は $x = y$ のとき，つまり正方形。

残りの 3 つは相加相乗平均で解くのは，難しい。(微分なら簡単なのに)

例 5. 与えられたる円に外接する菱形 ABCD と，そが円に接する点を各点とせる矩形 A'B'C'D' との面積の和を最小ならしむること。

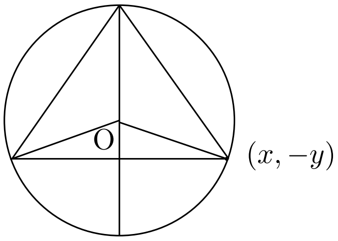


円の半径を r として，図のように $x > 0, y > 0$ を決めると，相似を使って，求める面積 S は $S = 4xy + \dfrac{2r^4}{xy}$ ここで喜んで，相加相乗平均を使うと $4xy + \dfrac{2r^4}{xy} \geqq 2\sqrt{4xy\dfrac{2r^4}{xy}} = 4\sqrt{2}r^2$

これがミス。まず，$r^2 = x^2 + y^2 \geqq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy$ つまり，$xy \leqq \dfrac{r^2}{2}$ より等号をみたす xy がこの範囲にない。

ここからが最近あまり見ないもの，S を最小とするのは，$\dfrac{2r^4}{xy} - 4xy$ を最小にするときで，これは減少関数だから $xy = \dfrac{r^2}{2}$ のとき。

例 6. 与えられたる円に内接せる二等辺三角形の中，面積の最大なるものは正三角形なり。

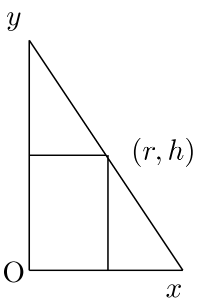


円の半径を r として，図のように $x > 0, y > 0$ を決めると，
求める面積 S は，x で表わすと $x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$,
y で表すと $\sqrt{r^2 - y^2}(r + y)$ ，y のほうが使いやすくて
$S^2 = (r^2 - y^2)(r + y)^2 = (r - y)(y + y)^3$
これで微分ってのが普通ですよね。

微分を使わずに，$2r = r - y + \dfrac{r+y}{3} + \dfrac{r+y}{3} + \dfrac{r+y}{3} \geqq \sqrt[3]{(r-y)(r+y)^3}$

等号は $r - y = \dfrac{r+y}{3}$ つまり $y = \dfrac{r}{2}$ のときで，それは正三角形。

例 7. 与えられたる直円柱に，軸を同じくせる直円錐を外接せしむるとき，その容積の最小なるものを求む。



円柱の底面の半径と高さをそれぞれ r, h として，図のように $x > 0, y > 0$ を決めると，
直円錐の体積 V は，相似を使って x で表わすと $V = \dfrac{h\pi}{3}\dfrac{x^3}{x-r}$
これで微分ってのが普通ですよね。

$$\frac{x-r}{x^3} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{r}{x}\right) = \frac{4}{r^2}\frac{r}{2x}\frac{r}{2x}\left(1 - \frac{r}{x}\right) \leqq \frac{4}{r^2}\left(\frac{\frac{r}{2x} + \frac{r}{2x} + 1 - \frac{r}{x}}{3}\right)^3 = \frac{4}{27r^2}$$

よって，$V \geqq \dfrac{h\pi}{3}\dfrac{27r^2}{4} = \dfrac{9}{4}\pi r^2 h$ 等号は，$1 - \dfrac{r}{x} = \dfrac{r}{2x}$ つまり $x = \dfrac{3r}{2}$ のとき。

第 15 章　代数式の変動の図形

グラフのこと。

第 16 章　二次式の値の変動及其幾何学的表示

2 次関数のグラフ。

第 17 章　分数式の数値の変動

分数関数のグラフ。

第 18 章　方程式の根の変動

これこそ，数学ソフト利用が合ってます。

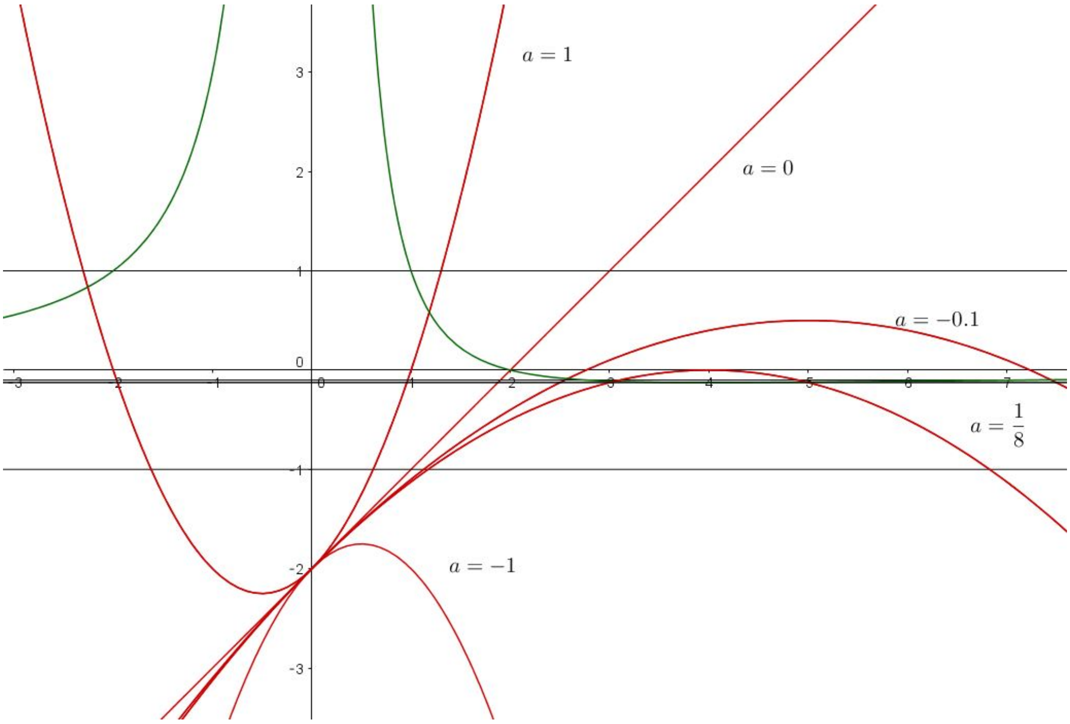
例 1. $ax^2+x-2=0$ の 2 次方程式の解の a の値による変化を調べよ。

今でいう定数分離法を使ってます。「定数を x の代数式とみなし，其の図形を描くべし」

$x \neq 0$ より， $a=\dfrac{2-x}{x^2}$ と変形し，右辺のグラフで考える。

さらに，$y=ax^2+x-2$ のグラフの a による変動も述べています。

下図の赤い放物線のグラフと x 軸の交点の個数と，緑色の分数関数のグラフと黒い x 軸に平行な線との交点の個数が一致。

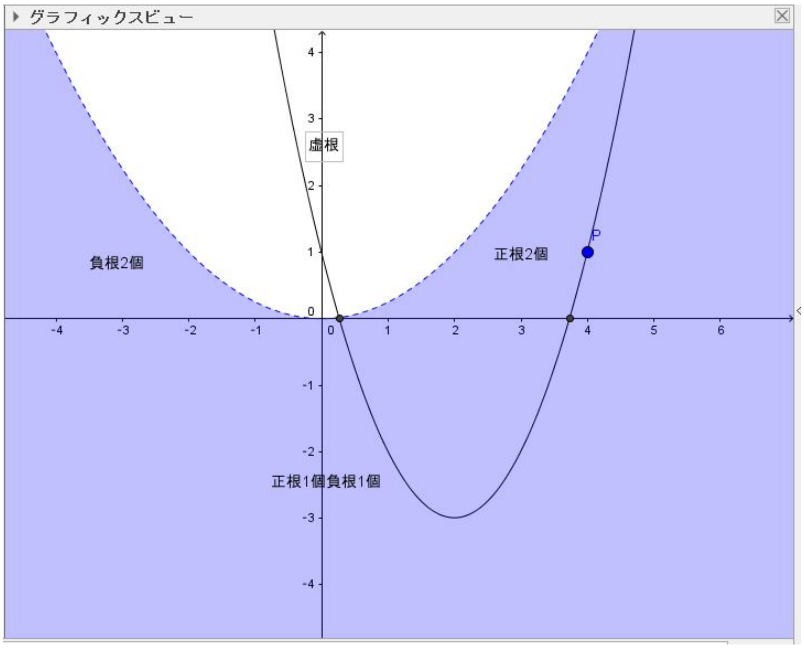


最後の話題は,

例 2.　2 次方程式 $x^2 - px + q = 0$ に於いて，係数 p, q の変動に伴い，其の二つの根の変動する状況について調べよ。

点 P (p, q) と放物線 $y = x^2 - px + q$ を 1:1 に対応させ，その放物線と x 軸との交点として考察。

これも，図にして明確。P が $y > \dfrac{x^2}{4}$ のときは虚根。それ以外の第一象限で正根 2 個，第二象限で負根 2 個，第三四象限で正根 1 個負根 1 個。



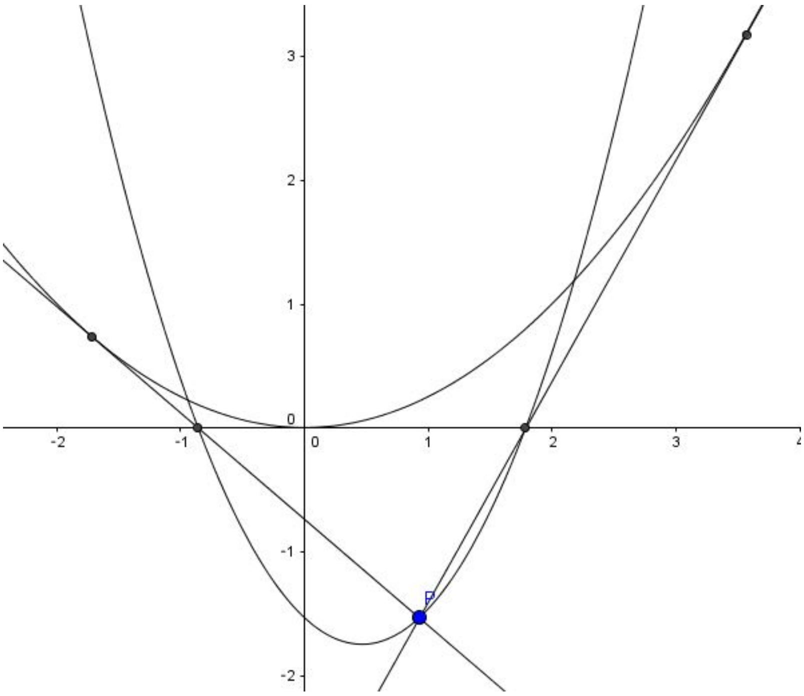
接線を代数的に示して，

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}(x-a)^2 + \frac{a}{2}(x-a) + \frac{a^2}{4} \geqq \frac{a}{2}(x-a) + \frac{a^2}{4}$$

座標 (p, q) なる点 P によりて表されたる二次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の 2 つの根は，点 P を通して放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引ける 2 つの接線が，x 軸に交わる 2 つの点の座標に等しい。

これも目で見えるし，まあ微分を使っても示すことはできる。

ついでに，点 P を通して放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引ける 2 つの接点を結ぶ直線の方程式が $y = \dfrac{p}{2}x - q$



練習問題が 200 題くらいついてます。面白いものだけやろうかな。