高等教育代数学 練習問題の中から

まずは**対称式と交代式**から

1. 次式を展開せよ。

   (1) $(x+y+z)^3$

   三次同次式の組み合わせを考えて，各係数は $\dfrac{3!}{3!}=1, \dfrac{3!}{2!1!}=3, 3!=6$

   $x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz$

   (2) $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$

   $x_1^3+\cdots+x_n^3+3(x_1^2x_2+\cdots+x_n^2x_{n-1})+6(x_1x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$

2. 次式を展開せよ。

   (1) $(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

   2 次同次式より，$x(a^2+b^2+c^2)+y(bc+ca+ab)$ ，係数を比べて

   $4(a^2+b^2+c^2)$

   あるいは，$a+b+c=s$ とすると，

   与式 $=s^2+(s-2a)^2+(s-2b)^2+(s-2c)^2=4s^2-4s(a+b+c)+4(a^2+b^2+c^2)$ で

   (2) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$ を用いて，

   $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$ を計算せよ。

   $x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$ とおくと，$x+y+z=a+b+c$ より

   $3(x+y)(y+z)(z+x)=3\cdot 2c2a2b=24abc$

3. 次式を因数分解せよ。

   (1) $(x+2y)x^3-(y+2x)y^3$

   $x^4-y^4+2xy(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(x^2+y^2+2xy)=(x+y)^3(x-y)$

   (2) $x(x-2y)^3-y(y-2x)^3$

   次数が高い展開を避ける，$a=x-2y, b=y-2x$ とおくと，$a+2b=-3x, b+2a=-3y$ なので，

   $(a+2b)a^3-(b+2a)b^3=(a+b)^3(a-b)$ より $-3x(x-2y)^3+3y(y-2x)^3=-(x+y)^3 3(x-y)$

   $x(x-2y)^3-y(y-2x)^3=(x+y)^3(x-y)$

4. 次式を因数分解せよ。

(1) $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$x=-y$ で 0 なので，$(y+z)(z+x)(x+y)$ で割れて，5 次の同次式だから，

$(y+z)(z+x)(x+y)\{a(x^2+y^2+z^2)+b(yz+zx+xy)\}$ の係数を比較して

$5x^4(y+z), 10x^3(y+z)^2$ と $ax^4(y+z), ax^3(y+z)^2+bx^3(y+z)^2$

$a=5, b=5$ となるので，$5(y+z)(x+z)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$

(2) $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$

$b+c-a=x, c+a-b=y, a+b-c=z$ とおくと，$x+y+z=a+b+c$ なので上の公式より

$5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$
$=5\cdot 2c2a2b\{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)+(c+a-b)(a+b-c)+(a+b-c)(b+c-a)\}$

$=40abc\{(b+c-a)2c+(c+a-b)2a+(a+b-c)2b\}=80abc(a^2+b^2+c^2)$

5. $a^2+ab+b^2=(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$ を利用して，以下を証明せよ。

n を 3 で割ると 1 余る整数とするとき，$x^{2n}+x^n+1$ は x^2+x+1 で割り切れる。

n' を整数として $f(x)=x^{2(3n'+1)}+x^{3n'+1}+1$ とおくと，

$f(\omega^2)=\omega^{2(6n'+2)}+\omega^{2(3n'+1)}+1=\omega+\omega^2+1=0$

$f(\omega)=\omega^{6n'+2}+\omega^{3n'+1}+1=\omega^2+\omega+1=0$

6. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ を因数分解せよ。

$a=b$ とすると 0 なので，$(a-b)(b-c)(c-a)$ で割りきれて，

a^3 の係数を比較して，$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

7. $x^3+y^3+z^3-3\omega xyz$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

$\omega x+y+z$ が因数となり，対称性により，$(\omega x+y+z)(x+\omega y+z)(x+y+\omega z)$

オイラーの公式

8. 次式を示せ。

(1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x+c)}=-\dfrac{x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(x+c)}$$
$$=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left\{E(k)x^2+(a+b+c)\{E(k)-E(k+1)\}x+abcE(k-1)\right\}$$

$k=0$ のとき，

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left[E(0)x^2+(a+b+c)\{E(0)-E(1)\}x-\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}\right]$$
$$=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$k=1$ のときは，本文の符号が間違っている気がする。

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left[E(1)x^2+(a+b+c)\{E(1)-E(2)\}x-+abcE(0)\right]=-\frac{x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

方程式

9. $(x-a)^3+(x-\omega a)^3+(x-\omega^2 a)^3=3(x^3-a^3)$

恒等式で方程式の問題とすれば，不定。

10. a,b,c 相異なるとき，次の方程式を解け。

(1) $ax+by+cz=a, bx+cy+az=b, cx+ay+bz=c$

変形すると，$a(x-1)+by+cz=0, b(x-1)+cy+az=0, c(x-1)+ay+bz=0$

答えは $(1,0,0)$ のみ。

(2) $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c$

変形すると，$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=b(x-1)+c(y-1)+a(z-1)=c(x-1)+a(y-1)+b(z-1)=0$

答えは $(1,1,1)$ のみ。

(3) $x+y+z=0, ax+by+cz=1, a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c$

$\left(\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}, \dfrac{b}{(b-c)(b-a)}, \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}\right)$

オイラーの公式

11. $\dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}=\dfrac{x}{a+\mu}+\dfrac{y}{b+\mu}=1$

この解法が見事。 t の方程式が λ,μ を解にもつとみて

$\dfrac{x}{a+t}+\dfrac{y}{b+t}-1=-\dfrac{(t-\lambda)(t-\mu)}{(a+t)(b+t)}$ これに $a+\lambda$ をかけて，$t=-a$ とすると

$x=\dfrac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}$ 同様に $y=\dfrac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}$

12. $x+\dfrac{1}{x}=2a, x-\dfrac{1}{x}=2b$ が共通解をもつ必要十分条件を求め，そのとき，共通しない解は符号のみを異なるものになることを示せ。

$x=a+b, \dfrac{1}{x}=a-b$ より，$a^2-b^2=1$

$x^2-2a+1=0, x^2-2bx-1=0$ より，それぞれ別の解は，定数項が $1,-1$ だから符号のみ違う。

13. $c\neq 0$ のとき，$x^2+ax+bc=0, x^2+bx+ca=0$ が共通解を一つだけもつとき，それぞれの共通解以外の解は，$x^2+cx+ab=0$ の解であることを示せ。

$a=b$ だと同じ方程式となるので，$a\neq b$ 。2 式の差 $(a-b)(x-c)=0$ より，共通解は $x=c$

このとき，$c^2+ac+dc=0, c(a+b+c)=0$，$c\neq 0$ より，$a+b+c=0$

共通解以外の解はそれぞれ $x=b, x=a$ であるが $a+b=-c$ より，それは $x^2+cx+ab=0$ の解。

14. (1) a,b,c 相異なるとき，方程式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ は，異なる 2 つの実数解をもち，$a<b<c$ のときは，a と b の間と b と c の間に解をもつことを示せ。

(2) a,b,c 相異なるとき，方程式 $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}=0$ も (1) と同様になることを示せ。

(1) の分母を払って，$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$ とおくと，$f(a)>0, f(b)<0, f(c)>0$

(2) これはまじめにやって損をした。「(1) の文字をすべて逆数とせよ。」と書いてあった。なるほど、このへんがこの本の面白いところだ。

15. 次の方程式を解け。

(1) $\dfrac{ax+b}{a+bx}=\dfrac{cx+d}{c+dx}$

(2) a,b,c がそれぞれ異なるとき， $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=0$

(3) $x^4+(a+1)x^3+(a-2)x^2-(a+1)x+1=0$

このへんもなかなかトリッキーで面白い。

(1) $x=1,-1$ は明らかに解。2 次方程式だから，これでおしまい。

(2) $(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)=0$ だから，

$3(x-a)(b-c)\cdot(x-b)(c-a)\cdot(x-c)(a-b)=0$ で，$x=a,b,c$

(3) a について整理してみると，

$(x^3+x^2-x)a+x^4+x^3-2x^2-x+1=0$

$(x^2+x-1)(ax+x^2-1)=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$

16. 次の無理方程式を解け。

(1) $\sqrt{x^2-2x+6}=14+2x-x^2$

(2) $\sqrt{5x^2+7x+2}-\sqrt{4x^2+7x+18}=x-4\cdots①$

(3) $\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2(x+1)$

(4) $\sqrt{x(a+b-x)}+\sqrt{a(b+x-a)}+\sqrt{b(a+x-b)}=0$

無理方程式については，昔と根号の書き方が違うようで，Geogebra で解けるもので面白いものだけにした。

(1) $\sqrt{x^2-2x+6}=y$ とおくと，$y\geqq 0$ で $y=20-y^2$ となり，$y=4$，$x=1\pm\sqrt{11}$

(2) 両辺に $\sqrt{5x^2+7x+2}+\sqrt{4x^2+7x+18}$ をかけて，$x^2-16=(x-4)(\sqrt{5x^2+7x+2}+\sqrt{4x^2+7x+18})$

$x=4$ と $x+4=\sqrt{5x^2+7x+2}+\sqrt{4x^2+7x+18}\cdots②$

①と②を加減して，$x=\sqrt{5x^2+7x+2}\cdots③, 4=\sqrt{4x^2+7x+18}$

ともに $4x^2+7x+2=0$ だが，$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{17}}{8}<0$ となり③と矛盾。

よって，$x=4$ のみ。(本は両方とも答えとなっている。Geogebra は 4 のみ。Geogebra の無理方程式を解く CAS は素晴らしい。)

(3) $\sqrt{(x+1)(x+3)}-\sqrt{(x+1)(x+2)}=2(x+1)$

$x=-1$ と $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x+1}$

後半の式は移項しながら 2 回平方し，$x=-\dfrac{23}{24}$ これは元の式を満たす。

よって，$x=-1,-\dfrac{23}{24}$

(4) これなんかは，Geogebra も $x=a+b,-a-b,a-b,-a+b$ と答えが出るが，元の式の符号が合わない。根号の表し方が昔は正負両方を意味していたようだ。

最後の項を移項して，両辺を平方し，整理すると

$2\sqrt{ax(a+b-x)(b+x-a)}=(x-a+b)(x-a-b)$

$x=a+b,a-b \quad or \quad 2\sqrt{-ax}=\sqrt{(x-a+b)(x-a-b)}$

$-4ax=(x-a+b)(x-a-b)$ つまり $x^2+2ax+(a^2-b^2)=0$

$(x+a-b)(x+a+b)=0$ で $x=-a+b,-a-b$

17. $\dfrac{yz}{bz+cy}=\dfrac{zx}{cz+ax}=\dfrac{xy}{ay+by}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$

$yz=k(bz+cy),zx=k(cz+ax),xy=k(ay+by)$ とおくと，

$1=k(\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}),1=k(\dfrac{c}{z}+\dfrac{a}{x}),1=k(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y})$ すべて加えて，$2k(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z})=3$ を通して

$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{2k}$ つまり $x=2ka,y=2kb,z=2kc$

よって $k=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=4k^2$ で $k=\dfrac{1}{4}$

$x=\dfrac{a}{2},y=\dfrac{b}{2},c=\dfrac{c}{2}$ 本文には $x=y=z=0$ もあるが抜かしていいだろう。

18. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{c}{z}=1$

$\dfrac{x}{a}=X,\dfrac{y}{b}=Y,\dfrac{z}{c}=Z$ とおくと，$\dfrac{1}{X}+Y+Z=X+\dfrac{1}{Y}+Z=X+Y+\dfrac{1}{Z}=1$

$(X-Y)(1+\dfrac{1}{XY})=0,(X-Z)(1+\dfrac{1}{XZ})=0$ を導いて，$X=YorXY=-1,X=ZorXZ=-1$

$X=Y=Z$ or $Y=X,Z=-\dfrac{1}{X}$ or $Y=-\dfrac{1}{X},Z=X$ or $Y=Z=-\dfrac{1}{X}$ で

$(x,y,z)=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{4}(a,b,c),(a,b,-c),(a,-b,c),(-a,b,c)$

19. $x^2-yz=a,y^2-zx=b,z^2-xy=c$ （難）

$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a+b+c$

$x^3-xyz=ax,y^3-xyz=by,z^3-xyz=cz$ より $x^3+y^3+z^3-3xyz=ax+by+cz$

一方 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ なので $ax+by+cz=(x+y+z)(a+b+c)$

$\dfrac{a^2-bc}{x}=x^3+y^3+z^3-3xyz$ なので（気付かない）

$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ とおくと $\dfrac{a^2-bc}{x}=\dfrac{b^2-ca}{y}=\dfrac{c^2-ab}{z}=u$

$a^2-bc=ux,b^2-ca=uy,c^2-ab=uz$ より $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=u(x+y+z)$

$a+b+c$ を両辺にかけて，$a^3+b^3-3abc=u(a+b+c)(x+y+z)=u(ax+by+cz)=u^2$

よって $v=\pm\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}$ として $x=\dfrac{a^2-bc}{v},y=\dfrac{b^2-ca}{v},z=\dfrac{c^2-ab}{v}$

20. $x+y+z=a+b+c,(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0,x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$

視察によって (a,b,c) が解であることがわかる。$x-a=X,y-b=Y,z-c=Z$ とおくと簡単になり，

$X+Y+Z=0,(b-c)X+(c-a)Y+(a-b)Z=0,X(X+2a)+Y(Y+2b)+Z(Z+2c)=0$

前の 2 式から，$\dfrac{X}{2a-b-c}=\dfrac{Y}{2b-c-a}=\dfrac{Z}{2c-a-b}$ 比の値を k とおいて，$k=0$ は解だから，以下それ以外として

$(2a-b-c)k\{(2a-b-c)k+2a\}+(2b-c-a)k\{(2b-c-a)k+2b\}+(2c-a-b)k\{(2c-a-b)k+2c\}=0$

よって，$k=-\dfrac{2}{3}$ ，$x-a=-\dfrac{2}{3}(2a-b-c)$ 同様に

$x=\dfrac{2b+2c-a}{3},y=\dfrac{2c+2a-b}{3},z=\dfrac{2a+2b-c}{3}$

21. $x+\dfrac{1}{y}=1, y+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，$z+\dfrac{1}{x}=1$ を示せ。問題は 2 式から y を消去せよ，という問題。

このくらいは，Geogebra でも Maxima でも，eliminate というコマンドでやってくれる。

22. 次の式から x,y,z を消去せよ。

(1) $\dfrac{y-z}{y+z}=a, \dfrac{z-x}{z+x}=b, \dfrac{x-y}{x+y}=c$

(2) $x+y+z=a, x^2+y^2+z^2=b, x^3+y^3+z^3-3xyz=c$

(1) これは，Geogebra でも Maxima でもできませんでした。で，手計算でやってみると

$\dfrac{\frac{y}{z}-1}{\frac{y}{z}+1}=a$ より $\dfrac{y}{z}=\dfrac{1+a}{1-a}$ 同様に $\dfrac{y}{z}=\dfrac{1+a}{1-a}, \dfrac{z}{x}=\dfrac{1+b}{1-b}, \dfrac{x}{y}=\dfrac{1+c}{1-c}$ すべてかけて

$1=\dfrac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ 整理して $a+b+c=abc$

(2) これは Maxima はできないで，Geogebra はできました。

対称式の $xy+yz+zx$ を消去すれば，$a^3-3ab+2c=0$

不等式

23. $a>0, b>0, c>0$ のとき，次を示せ。

(1) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt{\dfrac{bc+ca+ab}{3}} \geqq \sqrt[3]{abc}$

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqq 9abc$

(3) $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b} \geqq \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{a+b+c}$

すべて正というのが相加相乗平均の関係を使えるということで，

(1) 左側は，$(a+b+c)^2 \geqq 3(bc+ca+ab)$ すなわち $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab \geqq 0$ と同値。

右側は，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$ すなわち $\dfrac{bc+ca+ab}{abc} \geqq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$ と同値。

(2) は楽で，(3) は $b+c=A, c+a=B, a+b=C$ とおくと，$2(a+b+c)=A+B+C$ なので，

$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C} \geqq \dfrac{9}{A+B+C}$ つまり $\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}\right)(A+B+C) \geqq 9$ を示せばいい。

24. 不等式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}>0$ を解け。

14(1) より，$=0$ とおいた方程式の解を $\alpha<\beta$ とおくと，$a<b<c$ のとき，$a<\alpha<b<\beta<c$

このとき不等式の解は，$(x-a)(x-\alpha)(x-b)(x-\beta)(x-c)>0$ の解と同じになるので，

$a<x<\alpha, b<\beta, c<x$

25. $a_k, b_k (k=1,2,\cdots,n)$ がすべて正のとき，

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ は $\dfrac{a_k}{b_k}$ の最小値と最大値の中間にあることを示せ。

最大値を $\dfrac{a_m}{b_m}$ とおくと，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}-\dfrac{a_m}{b_m}$ の分子は，

$b_m(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_m(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(b_m a_k-a_m b_k)$

ところが，$\dfrac{a_m}{b_m} \leqq \dfrac{a_k}{b_k}$ より，$b_m a_k-a_m b_k \geqq 0$

26. a, b, c が実数のとき，$a^2(a^2-bc)+b^2(b^2-ca)+c^2(c^2-ab)\geqq 0$ を示せ。

$a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c)$ を示せばいい。

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab \geqq 0$ を続けて使って

$a^4+b^4+c^4 \geqq b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \geqq ca^2b+ab^2c+bc^2a \geqq abc(a+b+c)$

27. $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ は正数で，$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$ のとき，次式の成立を示せ。

$$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots+\frac{s}{s-a_n} \geqq \frac{n^2}{n-1}$$

23(3) と同様。

$s-a_k=A_k(k=1,2,\cdots,k)$ とすると，$(n-1)s(\frac{1}{A_1}+\cdots+\frac{1}{A_n}) \geqq n^2$ と同値。

$A_1+\cdots+A_n=ns-s=(n-1)s$ なので

$$(A_1+\cdots+A_n)(\frac{1}{A_1}+\cdots+\frac{1}{A_n}) \geqq n\sqrt[n]{A_1\cdots A_n}\,n\sqrt[n]{\frac{1}{A_1\cdots A_n}}=n^2$$

28. ヘロンの公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（ただし，$a+b+c=2p$ (周囲)）を使って以下を示せ。

周囲が与えられた三角形のうちで，面積が最大になるものは正三角形である

面積が与えられた三角形のうちで，周囲が最小になるものは正三角形である

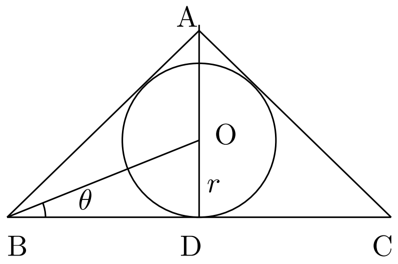
相加相乗平均の関係より，$p=p-a+p-b+p-c \geqq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqq (p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}$$

よって，$S \leqq \dfrac{p^2}{\sqrt{27}}$ あるいは $p \geqq \sqrt[4]{27}\sqrt{S}$ 等号は $a=b=c$ のとき。

応用問題

29. 与えれれた円に外接する二等辺三角形の面積の最小値を求めよ。



変数のとり方は色々ありそうだが，図のように θ を取ると，

$0^\circ<\theta<45^\circ$ で $\angle BAO=90^\circ-2\theta$

面積 $S=\dfrac{1}{2}2\dfrac{r}{\tan\theta}\dfrac{r}{\tan\theta}\tan 2\theta$ より

$$\frac{S}{r^2}=\frac{\tan 2\theta}{\tan^2\theta}=\frac{2}{t(1-t^2)}$$

$\tan\theta=t$ とおいて $0<t<1$。

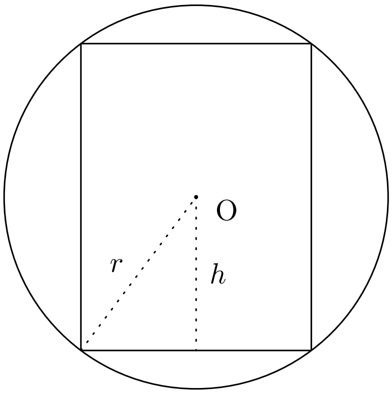
$t(1-t^2)$ の最大値を求めればいい。微分すればすぐだが。

$$at(b+bt)(1-t) \leqq \left(\frac{(a+b-1)t+b+1}{3}\right)^3$$

$a+b=1, at=b+bt=1-t$ を満たす a, b, t があればいいが，解けて，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

正三角形，高さ $3r$，面積 $3\sqrt{3}r^2$

30. 与えられたる球に容積の最大なる直円柱を内接せしめよ。



変数のとり方は色々ありそうだが，図のように h を取ると，

$0 < h < r$ で

円柱の体積 $\pi(r^2 - h^2)2h = 2\pi h(r^2 - h^2)$

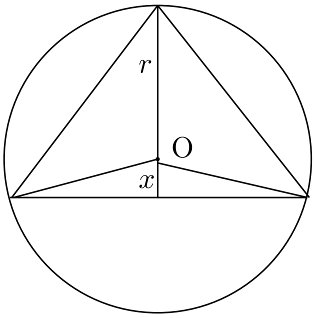
$h(r^2 - h^2)$ の最大値を求めればいい。微分すればすぐだが。

$ah(b + bh)(r - h) \leqq \left(\dfrac{(a + b - 1)h + b + r}{3}\right)^3$

$a + b = 1, ah = b + bh = r - h$ を満たす a, b, h があればいいが，解けて，$h = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$

高さ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$，体積 $\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{9}r^3$

31. 与えられたる球に容積の最大なる直円錐を内接せしめよ。



変数のとり方は色々ありそうだが，図のように x を取ると，

$0 < x < r$ で

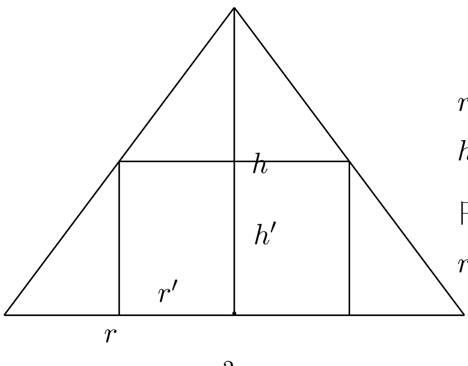
円錐の体積 $\dfrac{\pi}{3}(\sqrt{r^2 - x^2})^2(x + r) = \dfrac{\pi}{3}(r - x)(r + x)^2$

$(r - x)(r + x)^2$ の最大値を求めればいい。微分すればすぐだが。

$(r - x)(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}r)(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}r) \leqq \left(\dfrac{2r}{3}\right)^3, r - x = 1, \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}r$ を満たすのは $x = \dfrac{r}{3}$

よって答えは，高さが直径の $\dfrac{2}{3}$ の円錐。

32. 与えられたる直円錐に，側面積の最大なる直円柱を内接せしめよ。



r, h(円錐の半径，高さ)$, r', h'$(円柱の半径，高さ) とおくと，

$h' = \dfrac{h}{r}(r - r')$ で

円柱の側面積 $2\pi r'h' = \dfrac{2\pi h}{r}r'(r - r')$

$r'(r - r')$ の最大値を求めればいい。平方完成すればすぐだが。

$r'(r - r') \leqq \left(\dfrac{r}{2}\right)^2, r - r' = r'$ を満たすのは $r' = \dfrac{r}{2}$ このとき，$h' = \dfrac{h}{2}$

よって答えは，高さが与えられたる円錐の高さの $\dfrac{1}{2}$ の円柱。

33. 与えられたる直円錐に，容積の最大なる直円柱を内接せしめよ。

円柱の体積 $\pi r'^2 h' = \dfrac{\pi h}{r}r'^2(r - r')$

$r'^2(r - r')$ の最大値を求めればいい。微分すればすぐだが。

$\dfrac{r'}{2}\dfrac{r'}{2}(r - r') \leqq \left(\dfrac{r}{3}\right)^3, \dfrac{r'}{2} = r - r'$ を満たすのは $r' = \dfrac{2}{3}r$ このとき，$h' = \dfrac{h}{3}$

よって答えは，高さが与えられたる円錐の高さの $\dfrac{1}{3}$ の円柱。