高等教育代数学 練習問題の中から

200 題の内から 33 題えらんで，問題編

1. 次式を展開せよ。

   (1) $(x+y+z)^3$

   (2) $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$

2. 次式を展開せよ。

   (1) $(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

   (2) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$ を用いて，

   $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$ を計算せよ。

3. 次式を因数分解せよ。

   (1) $(x+2y)x^3-(y+2x)y^3$

   (2) $x(x-2y)^3-y(y-2x)^3$

4. 次式を因数分解せよ。

   (1) $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

   (2) $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$

5. $a^2+ab+b^2=(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$ を利用して，以下を証明せよ。

   n を 3 で割ると 1 余る整数とするとき，$x^{2n}+x^n+1$ は x^2+x+1 で割り切れる。

6. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ を因数分解せよ。

7. $x^3+y^3+z^3-3\omega xyz$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

8. 次式を示せ。

   (1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

   (2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x+c)}=-\dfrac{x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

方程式 以下，$x, y, z, \cdots$ が未知数で，$a, b, c, \cdots$ は定数とする。

9. $(x-a)^3+(x-\omega a)^3+(x-\omega^2 a)^3=3(x^3-a^3)$ を解け。

10. a, b, c 相異なるとき，次の方程式を解け。

    (1) $ax+by+cz=a, bx+cy+az=b, cx+ay+bz=c$

    (2) $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c$

    (3) $x+y+z=0, ax+by+cz=1, a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c$

11. $\dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}=\dfrac{x}{a+\mu}+\dfrac{y}{b+\mu}=1$ を解け。

12. $x+\dfrac{1}{x}=2a, x-\dfrac{1}{x}=2b$ が共通解をもつ必要十分条件を求め，そのとき，共通しない解は符号のみを異なるものになることを示せ。

13. $c \neq 0$ のとき，$x^2+ax+bc=0, x^2+bx+ca=0$ が共通解を一つだけもつとき，それぞれの共通解以外の解は，$x^2+cx+ab=0$ の解であることを示せ。

14. (1) a, b, c 相異なるとき，方程式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ は，異なる 2 つの実数解をもち，$a<b<c$ のときは，a と b の間と b と c の間に解をもつことを示せ。

    (2) a, b, c 相異なるとき，方程式 $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}=0$ も (1) と同様になることを示せ。

15. 以下の方程式を解け。

    (1) $\dfrac{ax+b}{a+bx}=\dfrac{cx+d}{c+dx}$

    (2) a, b, c がそれぞれ異なるとき，$(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=0$

    (3) $x^4+(a+1)x^3+(a-2)x^2-(a+1)x+1=0$

16. 次の無理方程式を解け。

    (1) $\sqrt{x^2-2x+6}=14+2x-x^2$

    (2) $\sqrt{5x^2+7x+2}-\sqrt{4x^2+7x+18}=x-4$

    (3) $\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2(x+1)$

    (4) $\sqrt{x(a+b-x)}+\sqrt{a(b+x-a)}+\sqrt{b(a+x-b)}=0$

17. $\dfrac{yz}{bz+cy}=\dfrac{zx}{cz+ax}=\dfrac{xy}{ay+by}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ を解け。

18. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{c}{z}=1$ を解け。

19. $x^2-yz=a, y^2-zx=b, z^2-xy=c$ を解け。（難）

20. $x+y+z=a+b+c, (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0, x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$ を解け。

21. $x+\dfrac{1}{y}=1, y+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，$z+\dfrac{1}{x}=1$ を示せ。問題は 2 式から y を消去せよ，という問題。

22. 次の式から x, y, z を消去せよ。

    (1) $\dfrac{y-z}{y+z}=a, \dfrac{z-x}{z+x}=b, \dfrac{x-y}{x+y}=c$

    (2) $a+b+c=a, a^2+b^2+c^2=b, a^3+b^3+c^3-3xyz=c$

23. $a>0, b>0, c>0$ のとき，次を示せ。

(1) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt{\dfrac{bc+ca+ab}{3}} \geqq \sqrt[3]{abc}$

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqq 9abc$

(3) $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b} \geqq \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{a+b+c}$

24. 不等式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}>0$ を解け。

25. $a_k, b_k (k=1,2,\cdots,n)$ がすべて正のとき，

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ は $\dfrac{a_k}{b_k}$ の最小値と最大値の中間にあることを示せ。

26. a, b, c が実数のとき，$a^2(a^2-bc)+b^2(b^2-ca)+c^2(c^2-ab) \geqq 0$ を示せ。

27. $a_k (k=1,2,\cdots,n)$ は正数で，$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$ のとき，次式の成立を示せ。

$\dfrac{s}{s-a_1}+\dfrac{s}{s-a_2}+\cdots+\dfrac{s}{s-a_n} \geqq \dfrac{n^2}{n-1}$

28. ヘロンの公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（ただし，$a+b+c=2p$（周囲））を使って以下を示せ。

周囲が与えられた三角形のうちで，面積が最大になるものは正三角形である

面積が与えられた三角形のうちで，周囲が最小になるものは正三角形である

29. 与えれれた円に外接する二等辺三角形の面積の最小値を求めよ。

30. 与えられたる球に容積の最大なる直円柱を内接せしめよ。

31. 与えられたる球に容積の最大なる直円錐を内接せしめよ。

32. 与えられたる直円錐に，側面積の最大なる直円柱を内接せしめよ。

33. 与えられたる直円錐に，容積の最大なる直円柱を内接せしめよ。