高等教育代数学　の最近見かけないものと極端に複雑でないものだけ取り上げて

1 章 実数，文字の使用

2 章　整式 及 其四則

対称式と交代式

次を計算せよ（答は因数分解のかたちで）

例 1. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

例 2. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

例 3. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

例 4. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

例 5. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$

例 6. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

例 7. $a^3+b^3+c^3-3abc$

例 8. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

3 章　分数式

次の式を簡単にせよ。

$$E(0)=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$
$$E(1)=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$
$$E(2)=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$
$$E(3)=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

例 1. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}\dfrac{b^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}$

例 2. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$

例 3. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$

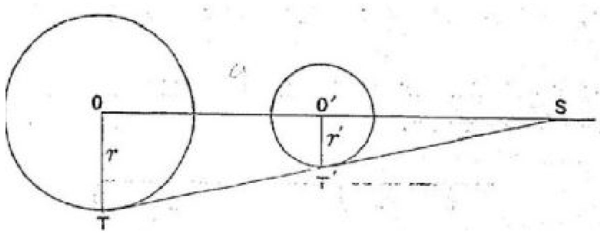
例 4. $\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$ のとき $\dfrac{ay-bx}{a-b}$ は同じ値で $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)$

第 5 章　一元一次方程式

例 1. $\dfrac{a^2(b+c-x)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(c+a-x)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(a+b-x)}{(c-a)(c-b)}=x-(a+b+c)$ を解け。

例 2. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$ を解け。

例 3. 半径が r, r' なる 2 つの円の中心 O,O' の距離を a とす。今 OO' の延長線と，下図の如き位置にある共通切線（昔はこう書いたのか）TT' との交点を S とせば，OS の長さは幾許（いくばく）なるべきか。



（そのままの図）

例 4. $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x}$ を解け。

第 6 章　連立一次方程式

例 1. $\begin{cases} x+y=2a \\ (a-b)x=(a+b)y \end{cases}$ を解け。

例 2. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2ab}=\dfrac{x+y}{a^2+b^2} \\ \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a \end{cases}$ を解け。

例 3. $\begin{cases} bx+ay=2ab \\ a^2x+b^2y=a^3+b^3 \end{cases}$ を解け。

例 4. $\begin{cases} y+z-kx=2a \\ z+x-ky=2b \\ x+y-kz=2c \end{cases}$ を解け。

例 5. $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ ax+by+cz=bc+ca+ab \\ bcx+cay+abz=3abc \end{cases}$ を解け。（ただし，a, b, c はすべて異なる数）

例 6. $\begin{cases} ax=by=cz=du\cdots ① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{m} \end{cases}$

例 7. $\begin{cases} y+2z+3u+4v=a \\ z+2u+3v+4x=b \\ u+2v+3x+4y=c \\ v+2x+3y+4z=d \\ x+2y+3z+4u=e \end{cases}$ を解け。

例 8. $\begin{cases} x-y=a-b\cdots ① \\ \dfrac{x}{a+\lambda}+\dfrac{y}{b+\lambda}=1\cdots ② \\ \dfrac{x}{a-\lambda}+\dfrac{y}{b-\lambda}=1\cdots ③ \end{cases}$ は並立することを得るか。ただし，$\lambda \neq 0$

第 9 章　1 元 2 次方程式に帰着する方程式

例 1. $\dfrac{b+c}{bc-x}+\dfrac{c+a}{ca-x}+\dfrac{a+b}{ab-x}=\dfrac{a+b+c}{x}$ を解け。ただし $a+b+c\neq 0$ とする。

例 2. $x^4-4(a+b)x^2+16(a-b)^2=0$ を解け。

例 4. $\dfrac{b(a-x)^3-a(b-x)^3}{x}=(a-x)^3-(b-x)^3$ を解け。

第 10 章　連立 2 次方程式

例 1. $\begin{cases} x^2+2xy-y^2=a^2+2a-1\cdots① \\ (a-1)x(x+y)=a(a+1)y(x-y)\cdots② \end{cases}$ を解け。

例 2. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=x+y\cdots① \\ 3x^2-5xy-2y^2=4x-2y\cdots② \end{cases}$ を解け。

例 3. $\begin{cases} x^2+4xy-y^2+4x+5=0\cdots① \\ 3x^2+y^2+4x-3=0\cdots② \end{cases}$ を解け。

例 4. $\begin{cases} (x+y)(1+xy)=xy \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2)=x^2y^2 \end{cases}$ を解け。

例 5. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^3+y^3+z^3=36 \\ xyz=6 \end{cases}$ を解け。

例 6. (1) $\begin{cases} (x+y)(x+z)=a^2 \\ (y+z)(y+x)=b^2 \\ (z+x)(z+y)=c^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=a \\ (z+x)(x+y+z)=b \\ (x+y)(x+y+z)=c \end{cases}$ (3) $\begin{cases} yz=by+cz \\ zx=cz+ax \\ xy=ax+by \end{cases}$ を解け。

例 7. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=2xyz$ を解け。

例 8. $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 \end{cases}$ を解け。

例 9. $\begin{cases} yz+f^2=cy+bz \\ zx+g^2=az+cx \\ xy+h^2=bx+ay \end{cases}$ を解け。

第 12 章　不等式の原則

第 13 章　不等式の解法

例 1. 次の不等式を解け。(1) $\begin{cases} 3x - 5y > 8 \\ x - 4y < 6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 5y > 8 \\ x - 4y > 6 \end{cases}$

第 14 章　極大極小

例 1. 周囲の長さの与えられたる矩形の中，面積の最大なるものは正方形なり。
横，縦それぞれの長さを $x > 0, y > 0$ とすると，$2x + 2y = 4l$（定数）とおけて

例 2. 与えられたる円に内接する矩形の中，面積の最大なるものを求めよ。

例 3. 表面積の和が与えられたる直角六面体の中，容積の最大なるものは正六面体なり。

例 4. 与えられたる球に外接する正円錐の中，容積の最小なるものを求む。

例 5. 与えられたる円に外接する菱形 ABCD と，そが円に接する点を各点とせる矩形 A'B'C'D' との面積の和を最小ならしむること。

例 6. 与えられたる円に内接せる二等辺三角形の中，面積の最大なるものは正三角形なり。

例 7. 与えられたる直円柱に，軸を同じくせる直円錐を外接せしむるとき，その容積の最小なるものを求む。