ガウス関数・ガウス積分

例によって入試問題から，東工大 15 年

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。
(1) A の体積 V を求めよ。
(2) 点 $(t,0)\quad(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t)\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$ を示せ。
(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx$ を示せ。

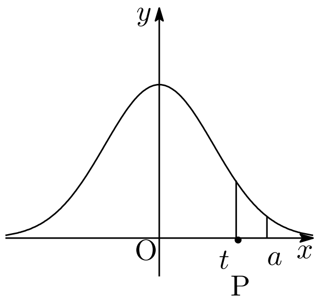
$y=e^{-x^2}$ をガウス曲線といい正規分布の曲線の元，**ガウス積分**は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ この雰囲気を高校生にもということかな。もちろん,「概論」にも登場します。ウォリスの公式の応用としてとガンマ関数のところにもあります。

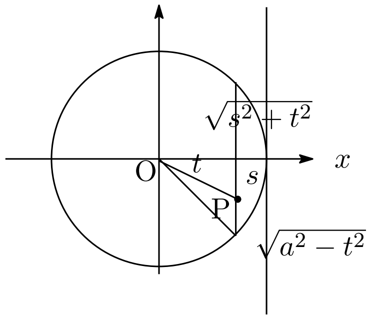
まず，この問題から，そして「概論」の計算が省略してあるところをしっかり計算してみるか。

(1) $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ はできないけど，$\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ は積分できる。バウムクーヘンにあっている。

$$V=2\pi\int_0^a xe^{-x^2}dx=-\pi\int_0^a(-x^2)'e^{-x^2}dx=\pi\left[e^{-x^2}\right]_a^0=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

(2) 右の図から





$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-OP^2}ds\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

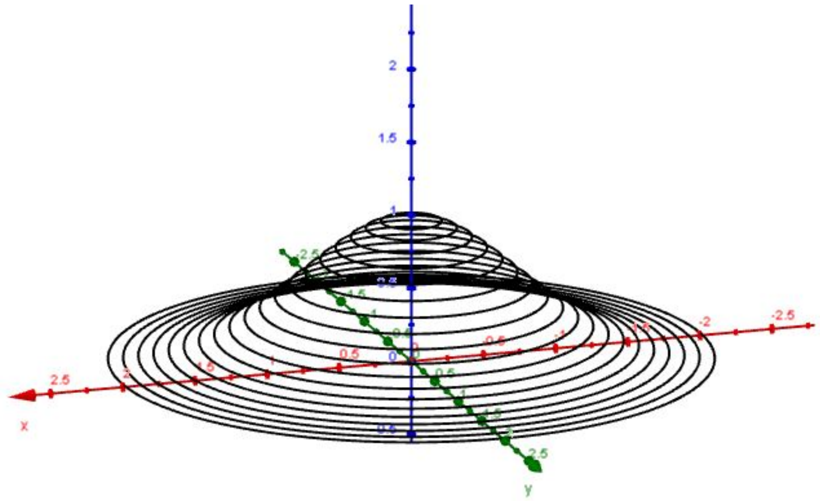
(3)

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds=e^{-t^2}\int_{-a}^{a}e^{-s^2}ds$$

$$V=\int_{-a}^{a}S(t)dt\leqq\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\left(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}ds\right)dt$$

$$\left(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}ds\right)\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt=\left(\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt\right)^2$$

Geogebra で回転体を示してみると，



$a\to\infty$ として，

$$\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

というわけだ。
素晴らしい。

さて,「概論」流にやろう。Wallis の公式の応用だから，$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ を使う。

まず，e^{-x^2} の評価から，$e^x > 1 + x$ を使って $1 - x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ で $(1-x^2)^n < e^{-nx^2} < \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n$

S_n に結びつけて $S_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \sin x\, dx = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

置換積分 $\cos x = t$ とおくと，$-\sin x dx = dt$, $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$

$S_{2n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\infty} \left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^n dt$

置換積分 $\cot x = t$ とおくと，$-\dfrac{1}{\sin^2 x} dx = dt$, $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \infty & 0 \end{array}$

$\int_0^1 (1-x^2)^n < \int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt < \int_0^{\infty} \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n dx$ (真ん中の項は$\sqrt{n}x = t$ と置換)

$\sqrt{n} S_{2n-1} < \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx < \sqrt{n} S_{2n-2}$

ここで Wallis の公式復習

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} S_{2m} = \dfrac{2m-1}{2m} \dfrac{2m-3}{2m-2} \cdots \dfrac{1}{2} \dfrac{\pi}{2} & \cdots \quad n = 2m \\ S_{2m+1} = \dfrac{2m}{2m+1} \dfrac{2m-2}{2m-1} \cdots \dfrac{2}{3} & \cdots \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

上式と下式をかけて　$S_{2m} S_{2m+1} = \dfrac{\pi}{4m+2}$ これを変形して $\sqrt{m} S_{2m} \sqrt{m} S_{2m+1} = \dfrac{m}{4m+2}\pi$

極限を取って $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} S_{2n+1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ これでやっとガウス積分の値が出る。

Maxima はもちろん知っている。

```
integrate(%e^(-x^2),x,0,inf);
```

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

　下の図は東工大の問題を Geogebra で解析したやつ。

Geogebra はプログラミングがいまイチ。二重ループでアニメーションさせるなんてのは，できそうもない。そこで，List を工夫しました。