「解析概論・再読」

高校生に。問題を解いていて，何故こういう問題があるのだろうとか思ったことはありませんか。これは，教科書＋αの内容で，さらに数学の興味を深めて欲しい，という願いから計画したものです。「解析概論」は無くてもいいですし，大学入試問題からも問題を選んであるので入試対策にもなりますよ。
数学が趣味の人に。解析概論はとてもいい本で，読み直すと興味は尽きません。高校の数学が好きだった人のために，もう少し進むととても面白いことがわかります。
もちろん私のためにも。Maxima とか Function View とか，コンピュータは思考の道具です。伝達の道具でもあります。楽しめました。

　目次のページは解析概論の数字です。

解析概論　再読 12

無限級数　一様収束

一様収束するならば極限（項別）微分積分思いのままかあ。

一様収束しない連続関数の極限が連続関数にならない例は高校の教材にもある。「概論」の例（上）は Simple。

$$\lim_{n\to\infty} x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \qquad \lim_{n\to+0} x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (0 < x = 1) \end{cases}$$

ゼータ関数とオイラーの定数は数 III の教科書にも関連はある。区分求積の範囲。

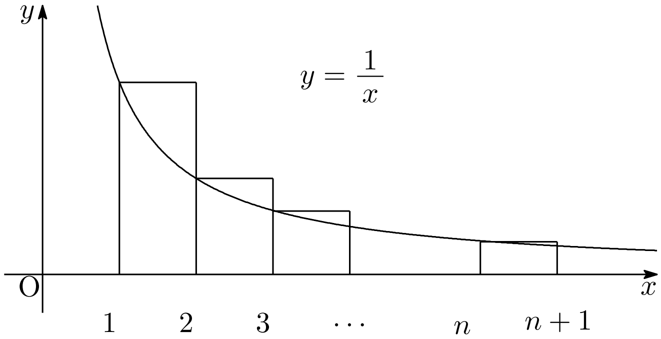
$s > 1$ ならば,$1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots + \dfrac{1}{n^s} < 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^s} = 1 + \left[\frac{1}{(-s+1)x^{s-1}}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1\right)$

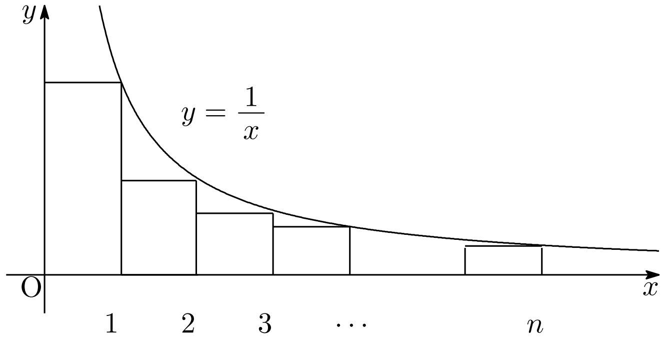
$\to \dfrac{s}{s-1} \quad (n \to \infty)$ 単調増加で有界なので和がある。それを $\zeta(s)$ と書いて**ゼータ関数**という。

$n = 2$ のとき, 和 < 2 で, グラフ電卓なんかで $\dfrac{\pi^2}{6}$ という値が出ると, さすがにビックリします。次のページに。

高校の教科書によく出てくるのは,$s = 1$ のとき。

$S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とおいてこの区分求積を定積分で小さく, あるいは大きく見積もると





$S > \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) \cdots ①$ 　　　　$S < 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \log n \cdots ②$

① より S は発散することがわかる。また $S - \log n > \log(n+1) - \log n > 0$,② より $S - \log n < 1$

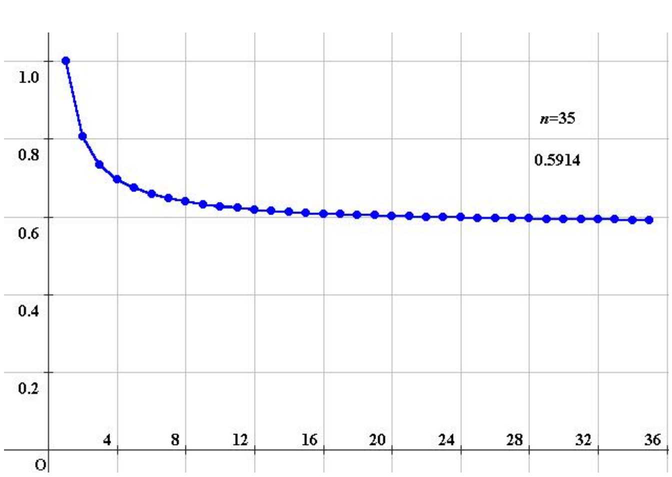
$a_n = S - \log n$ とおくと,$0 < a_n < 1$ で,

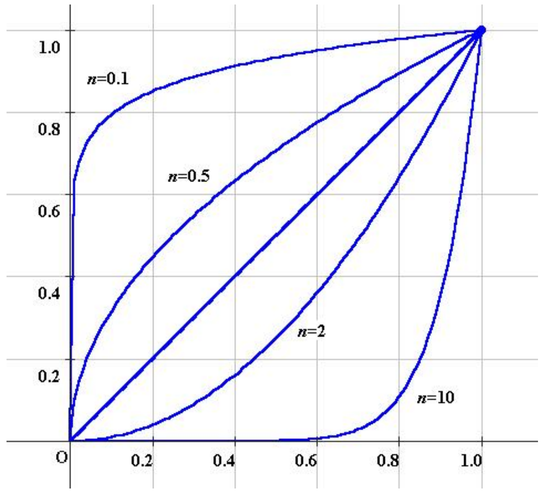
$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < 0$ なので有界で単調減少。

存在する極限を**オイラーの定数** C という。この収束はゆっくり。「**C の数論的性質は未知である。例えば C が無理数であるかどうかも知れていない。**」とある。

オイラーはさすがにそこらじゅうに名前が現れ, 自然対数の底（ネイピア数）もオイラー数という人がいるし, オイラー数は正割係数をもいうのでまぎらわしい。オイラーのすごい証拠でもあるが。

ファンクションビューの点の機能を使って, オイラー定数の収束する様子と $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ の様子を描いた。





さあ，**ゼータ関数** $\zeta(2)=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots$ の話題としよう。これは,「概論」ではもっと後のページに複素数の関数展開として出てくる。しかし, 高校の数　の範囲でもこの収束性くらいは出てくるので, ここで紹介しよう。区分求積を使った証明は前にあるので, 違う方法で証明しておこう。高校レベル。
$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots$ は発散,$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots$ は収束。
よく見るのは
$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}>1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^n}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$
$=1+\dfrac{n}{2}\to\infty(n\to\infty)$
$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1+\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$
$=2-\dfrac{1}{n}<2$
というもの。

なんという本だったか忘れたが, **オイラー**によるすごい方法が記憶にあるのでそれで説明しよう（証明じゃない説明）。
まずは $\sin x$ のマクローリン展開から
$\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots$ よって $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{1!}-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\cdots$
ここからがすごいところで,$\sin x=0$ の解は $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$ だから $x,(x^2-\pi^2),(x^2-(2\pi)^2)\cdots$ の因数を持つ。$\dfrac{\sin x}{x}$ としたから $x=0$ のとき右辺 1 （左辺の極限も 1）で,$(x^2-\pi^2),(x^2-(2\pi)^2)\cdots$ の因数を持つので $\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots=\dfrac{1}{1!}-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\cdots\cdots$ ① （これのきちんとした証明が後にやること）
この両辺の x^2 の係数を比較してみよ。すると,$-\dfrac{1}{\pi^2}-\dfrac{1}{(2\pi)^2}-\cdots=-\dfrac{1}{3!}$
さあ, **バーゼル級数**（バーゼルは大学があった町の名前らしい）驚きの級数 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$
ちなみに，両辺の x^4 の係数を比較すれば，$\displaystyle\sum_{i\neq j}\frac{1}{i^2\cdot j^2\pi^4}=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2\pi^2}\right)^2-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4\pi^4}\right\}=\frac{1}{5!}$ より，
$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)^2-2\frac{\pi^4}{5!}=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2-\frac{\pi^4}{60}=\frac{\pi^4}{90}$ 偶数の値はこれでいける。
ならば,$\cos x$ でも同様に $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots$ で $\cos x=0$ の解は $x=\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\cdots$ だから $\left(x^2-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right),\left(x^2-\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2\right)\cdots$ の因数を持つ。
$\left(1-\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2}\right)\cdots=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$ この両辺の x^2 の係数を比較してみよ。
すると,$-\dfrac{4}{\pi^2}-\dfrac{4}{(3\pi)^2}-\cdots=-\dfrac{1}{2!}$ よって $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$ 本当かよと思ってしまうが
$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots$
$=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{4\pi^2}{24}=\dfrac{\pi^2}{6}$ 本当らしい。
複素関数の級数展開による証明はまたずっと後で。それより，もっと面白いことを発見。
上の ① の式に $x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，
$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\right)=\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdots$$
すなわち $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\cdot2}{1\cdot3}\dfrac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdots$　**ウォリスの公式**じゃないか！（再読８参照）

このウォリスの公式からバーゼル級数の公式証明が入試に出てました。

20003 年　日本女子大 n を正の整数または 0 とする。次の (1)〜(7) に答えよ。

(1)　次の式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

(2)　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおく。次の式を示せ。

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ (n \geqq 2)$$

(3)　次の式を示せ。

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(4)　$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx$ とおく。次の式を示せ。

$$S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1} S_n = \frac{2}{2n(2n-1)} I_{2n} \quad (n \geqq 1)$$

(5)　次の式を示せ。ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする。

$$S_N = \frac{(2N-1)(2N-3)\cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right)$$

(6)　次の式を示せ。ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする。

$$S_N \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{(2N-1)(2N-3)\cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3$$

なお，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ では $x < \frac{\pi}{2} \sin x$ であることを用いてよい。

(7)　次の式を示せ。　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

やってくれるなあ。というより，入試でこんな問題（素晴らしい）を解かされる生徒たちが可哀相。さて，(1)〜(3) は既説，教科書にもある。(4) からがバーゼル級数への道。それは，漸化式（無限を扱うのだから漸化式に決まってるといえばいえる），積分で漸化式と言えば部分積分となる。

(4) $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos^{2n-1} x dx$

$$= \left[\sin x \cdot x^2 \cos^{2n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (2x \cos^{2n-1} x - x^2 (2n-1) \cos^{2n-2} x \cdot \sin x) dx$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cdot \cos^{2n-1} x dx + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos^{2n-2} x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cdot \cos^{2n-1} x dx + (2n-1)(S_{n-1} - S_n)$$

$$= -2 \left[\frac{\cos^{2n} x}{2n} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} dx + (2n-1)(S_{n-1} - S_n)$$

$$= \frac{1}{n} I_{2n} + (2n-1)(S_{n-1} - S_n)$$

(5)(6) は $\dfrac{(2N-1)(2N-3)\cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2} = I_{2N} \dfrac{2}{\pi}$ と気づけば，少し楽になる。

(5) は帰納法で証明，(6) は $S_N < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \sin x \right)^2 \cos^{2N} x dx$ として証明。手間がかかる。

解析概論　再読13

無限級数　一様収束　その２　巾級数

「巾級数は解析学で最も重要な級数である。」

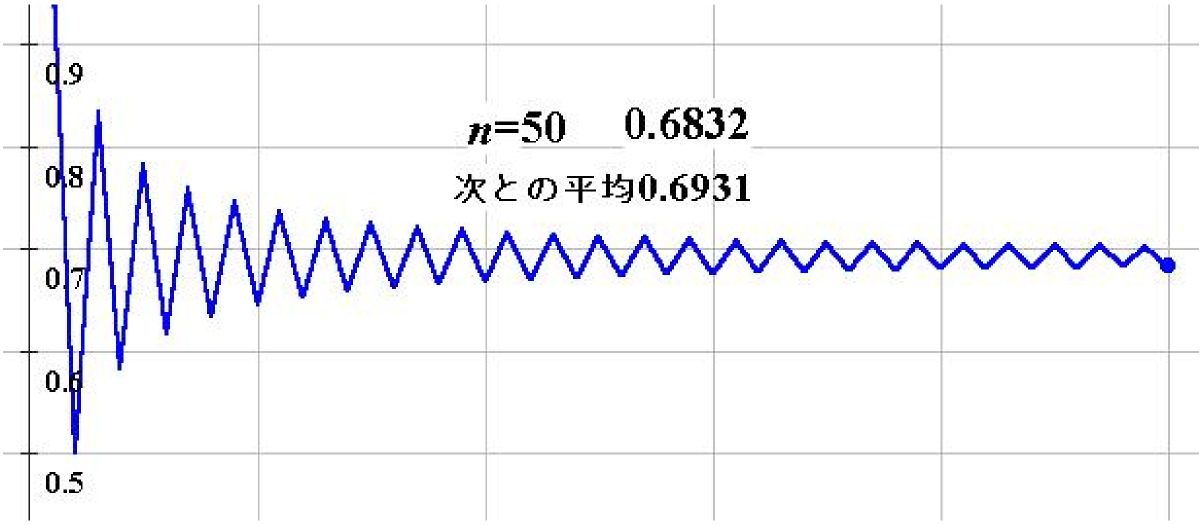
無限等比級数としても割り算を実行しても

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots,\ \dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$　$(|x|<1)$ を 0 から x まで積分して

$-\log(1-x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots,\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots\cdots$① これらを足し合わせて

$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots$

$\dfrac{1+x}{1-x}$は $0<x<1$ で 1 以上のすべての値をとるので,1 以上の対数表ができる。5 乗までの項で $\log 2,\log 3$ とも小数第 4 位を四捨五入すると同じくらい（$\log 2=0.693$）。



ちなみに ① に $x=1$ を代入すると,$\log 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots$ すでに出した $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\cdots$ と同様に収束が遅い。（後ろの級数は Gregory の公式と紹介したが概論では Leibniz の級数と出ています。独立に発見したようです。「神は奇数で楽しむ」とう訳もあるが、これはいかにもライプニッツ。）100 回くらいやっても 0.6882 と 0.6982 の間である。**交代級数**（符号を変えながら収束する）だから遅いのは当たり前で, 前との平均をとれば速くなる。50 回で 0.6931

両方とも収束を速くする方法が述べてあり無理数の計算機による近似値計算の話がある。あるいは Gausss 少年が愛用した 50 桁自然対数の表とかの話がある。交代級数は収束が遅いがいい面がある。収束半径 $|x|<1$ だから 1 を入れるのは気が引けるが,1 を代入しても極限があることが交代級数だとわりと楽にいえる。

$a_n>a_{n+1},\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ならば $a_1-a_2+a_3-a_4\cdots$ は収束する証明が p.152 に出ている。

興味深い練習問題があるので, ここで解く。p.200(12)

$a>0,b>0$ とすれば　$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\cdots$

解）与積分 $\displaystyle=\int_0^1 x^{a-1}(1-x^b+x^{2b}-x^{3b}+\cdots)dx=\int_0^1(x^{a-1}-x^{a+b-1}+x^{a+2b-1}-\cdots)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^a}{a}-\frac{x^{a+b}}{a+b}+\frac{x^{a+2b}}{a+2b}-\cdots\right]_0^1=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\cdots$ と解けるけれど, これはよく見ると 調和数列の交代級数の和を求める式となっている。

$a=1,b=1$ で上の $\log 2$ を求める式,$a=1,b=2$ でライプニッツの級数。

例えば 初項 1 , 公差 3 の等差数列の逆数の調和数列の交代級数 $a=1,b=3$ のときは

$\displaystyle\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots=\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{3\log 2+\sqrt{3}\pi}{9}$ なるほど

解析概論　再読14

指数関数および三角関数

かなり複雑な理論（指数関数）と幾何学の見地（三角関数）の歴史的発生とは違う方法で, **虚心に考えて**と, 解析的に積分から両関数を導びいている。

$\displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x}$ で対数関数を定義して, その逆関数で指数関数を定義する。

Maclaurin の展開から $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots=e^x$ これから指数法則も一般てきな巾の意味も確定する。

$\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdots①$ の逆三角関数から三角関数を定義して,Maclaurin 展開で

$\theta-\dfrac{\theta^3}{3!}+\cdots=\sin\theta$　$,1-\dfrac{\theta^2}{2!}+\cdots=\cos\theta$ これから加法定理も周期性も幾何学の助けなしに得られる。

① を曲線の長さの公式から導いて,Gauss がレムニスケートの長さから楕円関数を発見したように**「かりに微積分法の発見以前に, 三角関数が知られていなかったと想像するならば, 円弧の計算の必要上, 自然に**この**積分に遭遇したであろう。」**と楽しい想像をしている。

そして，ついに**指数関数と三角関数との関係　対数と逆三角関数**

結論**「実変数に関する三角関数，双曲線関数は複素変数に関する指数関数の一断面にほかならないから，それらの逆関数がすべて対数関数に包括されるのである。この認識は大切である。」**

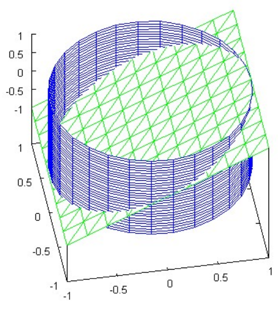
高校の授業ではまずテーラー展開（正しくはマクローリン）をやって,（上の定義の作業とちょうど逆）

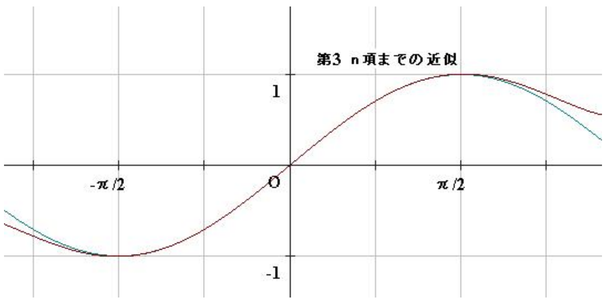
$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$　$,\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$　$,\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$

最初の式の x に xi を代入させて（収束するかどうかは大学でやれとか言いつつ）

$e^{xi}=\cos x+i\sin x$ を導かせ,「複素変数では指数関数と三角関数は同じだ！」なんていいながら，次にこの式の x に π を代入させます。オイラーの公式は最近とても有名になり（「博士の異常な愛情」じゃなくて「博士の愛した数式」効果），知っている生徒もいますが，やっぱり自分で計算して出すのとでは感動が違うでしょう。$e^{\pi i}=-1$ やっぱりここまでやらなきゃ。

テーラー展開はやはりすぐには信じられないので，次のグラフ（ファンクション・ビューについているサンプルマクロ）をやらせます。（昔はマスマティカでグラフをかいてアニメにしたっけ。）





$\dfrac{\pi}{2}$ までなら第 3 項 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$ までで十分ということもわかります。$\dfrac{\pi}{4}$ までなら第 2 項 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}$ までで十分ということもわかります。（$\dfrac{\pi}{4}$ で小数第 2 位までは同じ，3 項までなら小数第４位まで同じ）

「複素変数まで行けば，三角関数は単なる略記法としてのみ存在理由を有する。」ということになる。

$\cos x=\dfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2},\quad \sin x=\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2}$

そして,「応用数学で使われる双曲線関数」との比較をする。

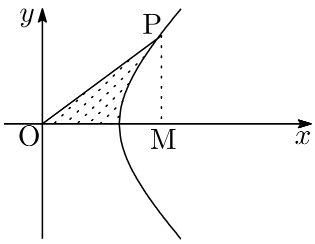
$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

解析概論　再読15

双曲線関数

「再読９」で既述ですが，あのときは $\sinh^{-1} x$ などと書きましたが，この本では $ar\sinh x$ と書いています。$arc\sin$ の arc は弧，$ar\sinh x$ ar は area（面積）。

何故なら，下の図の双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ つまり $y = \sqrt{x^2-1}$ の扇形 OAP の面積を２倍したものを σ と書くと，



$$\sigma = 2\left(\triangle OPM - \int_0^x \sqrt{x^2-1}\,dx\right)$$
$$= x\sqrt{x^2-1} - (x\sqrt{x^2-1} - ar\cosh x) = ar\cosh x$$

（再読９の表参照）

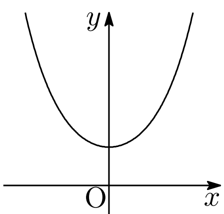
つまり $x = \cosh\sigma$ 同様に $y = \sinh\sigma$ 円の場合の三角関数と見事に類似している，というわけだ。せっかくなので，懸垂線について。

２回微分すると元に戻る関数が**懸垂線**　$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

懸垂線は catenary（catenate は連結する意味，チェーンのラテン名）

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$（究極の偶関数といえるだろう）$\sinh x = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$（究極の奇関数）

で，そこらのホームページによると懸垂線は



接線の傾きが長さ（重さ）に比例する　$\dfrac{dy}{dx} \propto l$

（重ければ急になるからかな。）

長さの微分は $\dfrac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ だから $\dfrac{d^2y}{dx^2} \propto \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

$\dot{y} = \dfrac{dy}{dx}$ とおくと $\dfrac{d\dot{y}}{dx} \propto \sqrt{1+\dot{y}^2}$ この微分方程式を解けばいい。

$\displaystyle\int \frac{d\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \propto \int dx$ なので $\sinh^{-1}\dot{y} \propto x$ よって $\dot{y} \propto \sinh x$

これを積分して，やっと　$y \propto \cosh x$

「初等関数といえども，複素変数にまで次元の拡張をしなくては完全に統制されないのである。」

で，第５章に行くと,「変数を複素数にまで拡張することは，19 世紀以後の解析学の特色で，それによって古来専ら取り扱われていたいわゆる初等函数の本性が始めて明らかになって，**微積分法に魂が入ったのである。**」となるんですね。

見事です、さっそく続いて５章へとも思うのですが（正則な解析関数を目で見るというのがやってみたいことの一つだったのだが），ここまででまずは一区切りとします。

高校生としてはこの辺でいいかなというのが一つの理由，もう一つの理由は代数ももう少しなんとかしたい。つまり，再読「初等整数論講義」がまず次にやるのがいいだろうと思うからです。もちろん，高木貞治です。その後で又この続きをできればやりたいと考えています。というわけで，再読「解析概論」一部終わりとします。

としたところ，もうちょっと話題があったので

解析概論17　関数空間

数　Bの問題集にこんな問題があります。

例題　次の2つの条件を同時に満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) 任意の1次関数 $g(x)$ に対して $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 1$

これなんかは関数空間を意識した問題で，$f(x)\cdot g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ とおくことにより，関数空間に**内積**を定義するというわけだ。上の問題は任意の1次関数に直交する2次関数の底を求め，それを(2)で正規化していることになる。

もっと前からいうと，任意の定数に直交する1次関数は k を定数として，$\displaystyle\int_0^1 k(ax+b)\,dx = 0$ より

$\displaystyle\left[\frac{a}{2}+b\right]_0^1 = 0$ つまり $a=-2b$ で $2x-1$ であることがわかる。

さて，任意の1次関数を $kx+l$ として，これに直交する2次関数を ax^2+bx+c とすると，

$\displaystyle\int_0^1 (kx+l)(ax^2+bx+c)\,dx = 0$ より $\displaystyle k\int_0^1 (ax^3+bx^2+cx)\,dx + l\int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx = 0$

$\displaystyle k\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}\right]_0^1 + l\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^1 = 0$ が任意の実数 k, l に対して成立すればいい。

つまり，$\displaystyle\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0, \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$ で，$a=6c, b=-6c$

$\displaystyle\int_{-1}^1 c(6x^2-6x+1)\,dx = 1$ より $\displaystyle 2c\left[2x^3+x\right]_0^1 = 1$ で $\displaystyle c=\frac{1}{6}\ \therefore f(x) = x^2-x+\frac{1}{6}$

Legendre の球関数

$Q(x)$ を $n-1$ 以下のすべての多項式とすると

$\displaystyle\int_a^b Q(x)P_n(x)\,dx = 0$ をみたす n 次の多項式 $P_n(x)$ は定数倍を無視して，

$\displaystyle\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n$ である。

何故なら，$\displaystyle\int_a^b QF^{(n)}\,dx = \left[QF^{(n-1)}\right]_a^b - \int_a^b Q'F^{(n-1)}$

$\displaystyle= \left[QF^{(n-1)} - Q'F^{(n-2)} + Q''F^{(n-1)}\cdots + (-1)^n Q^{(n-1)}F\right]_a^b$

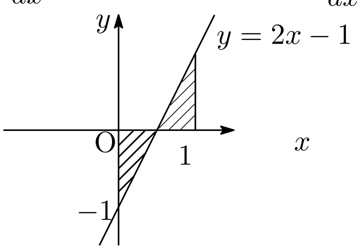
ところが，$F(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ とすると，

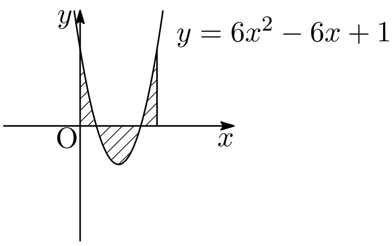
$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = 0, F(b) = F'(b) = \cdots = F^{(n-1)}(b) = 0$ より，上の積分が0となる。

よって，$\displaystyle P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n$ でよい。

すると，上の例題の解は

$\displaystyle\frac{d}{dx}\{x(x-1)\} = 2x-1, \frac{d^2}{dx^2}\{(x-a)^2(x-b)^2\} = 2(6x^2-6x+1)$





これが関数空間の直交関数系の一つの例。別の例が三角関数，これで Fourier 展開が作れる。微分から Taylor 展開ができたように，積分からは Fourier 展開ができるのだ。

それは，次の回にするとして，この関数空間が距離空間で **Schwarz の不等式**が成り立つことが高校の問題でも出てくる。

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b f(x)^2\,dx\int_a^b g(x)^2\,dx \quad \text{等号は，} f(x)=tg(x) \text{ なる実数 } t \text{ があるとき。}$$

これはベクトル空間の $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \leqq \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$ に対応している。

すべてに共通した証明は，実数 t について $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-tg(x)\}^2 \geqq 0$

$$\int_a^b f(x)^2\,dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + t^2\int_a^b g(x)^2 \geqq 0$$

よって，判別式をとって，

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b f(x)^2\,dx\int_a^b g(x)^2\,dx$$

別証明もベクトルの形でかいておくか。

$t=\dfrac{\vec{f}\cdot\vec{g}}{\left|\vec{g}\right|^2}$ とおけば，

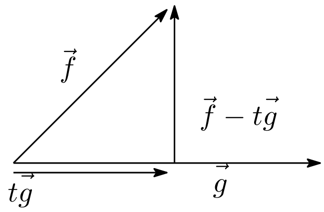
$\left|\vec{f}-t\vec{g}\right|^2 \geqq 0$

$\left|\vec{f}\right|^2 - 2t\vec{f}\cdot\vec{g} + t^2\left|\vec{g}\right|^2 \geqq 0$

t を代入して $\left|\vec{f}\right|^2 - 2\dfrac{\vec{f}\cdot\vec{g}}{\left|\vec{g}\right|^2}\vec{f}\cdot\vec{g} + \left(\dfrac{\vec{f}\cdot\vec{g}}{\left|\vec{g}\right|^2}\right)^2\left|\vec{g}\right|^2 \geqq 0$

$\left|\vec{f}\right|^2\left|\vec{g}\right|^2 - 2\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)^2 + \left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)^2 \geqq 0$

$\therefore \left|\vec{f}\right|^2\left|\vec{g}\right|^2 \geqq \left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)^2$



例によって，入試問題から，’00 徳島大

(1) $f(t)$ と $g(t)$ を t の関数とする。

x と k を実数とするとき，$\displaystyle\int_{-1}^{x}\{f(t)+kg(t)\}^2\,dt$ の性質を用いて次の不等式を導け。

$$\left|\int_{-1}^{x}\{f(t)g(t)\}dt\right|^2 \leqq \left(\int_{-1}^{x}\{f(t)\}^2dt\right)\left(\int_{-1}^{x}\{g(t)\}^2dt\right)$$

(2) $\left|-\dfrac{1}{\pi}(x+1)\cos\pi x + \dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x\right|^2 \leqq \dfrac{1}{3}(x+1)^3\left(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\right)$　を示せ。

略解） $f(t)=t+1, g(t)=\sin\pi t$ とすればいい。

解析概論18　フーリエ級数

前の回で関数空間の正規直行系（内積を定義してそれによる大きさが１で，互いに直交する底がつくるベクトル空間のようなもの）の１例をやったのだが，その代表的なものが三角関数の周期が違う関数を合わせたもの。微分可能なら Taylor 展開ができたように，積分可能なら Fourier 展開ができる。

内積を $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ と定義して，まずは，直交性から

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0\qquad(\because\quad \sin\pi=\sin(-\pi)=0,\cos\pi=\cos(-\pi))$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m{+}n)x{-}\cos(m{-}n)\}x\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{1-\cos 2mx\}\,dx=\pi\cdots m=n\\ 0 \qquad\qquad\qquad\cdots m\neq n\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m{+}n)x{+}\cos(m{-}n)\}x\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{1+\cos 2mx\}\,dx=\pi\cdots m=n\\ 0 \qquad\qquad\qquad\cdots m\neq n\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)\}x\,dx=0$$

すると，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx(n=0,1,2,\cdots),b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx(n=1,2,\cdots)$ で a_n,b_n を決めると

$f(x)=\dfrac{a_n}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$ と展開される。これが，ある条件のもとに確かに収束するというものだ。

具体的な例に進む。

その１　$f(x)=x$ のときは，奇関数なので $f(x)=b_1\sin x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots$ となり，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right)=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

よって，$\dfrac{x}{2}=\sin x-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}-\cdots$

ここで，$x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，$\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots$ と**ライプニッツの公式**が出るというわけだ。

これでは，解析概論そのままだから，Maxima で Fourier 級数を目で見よう。

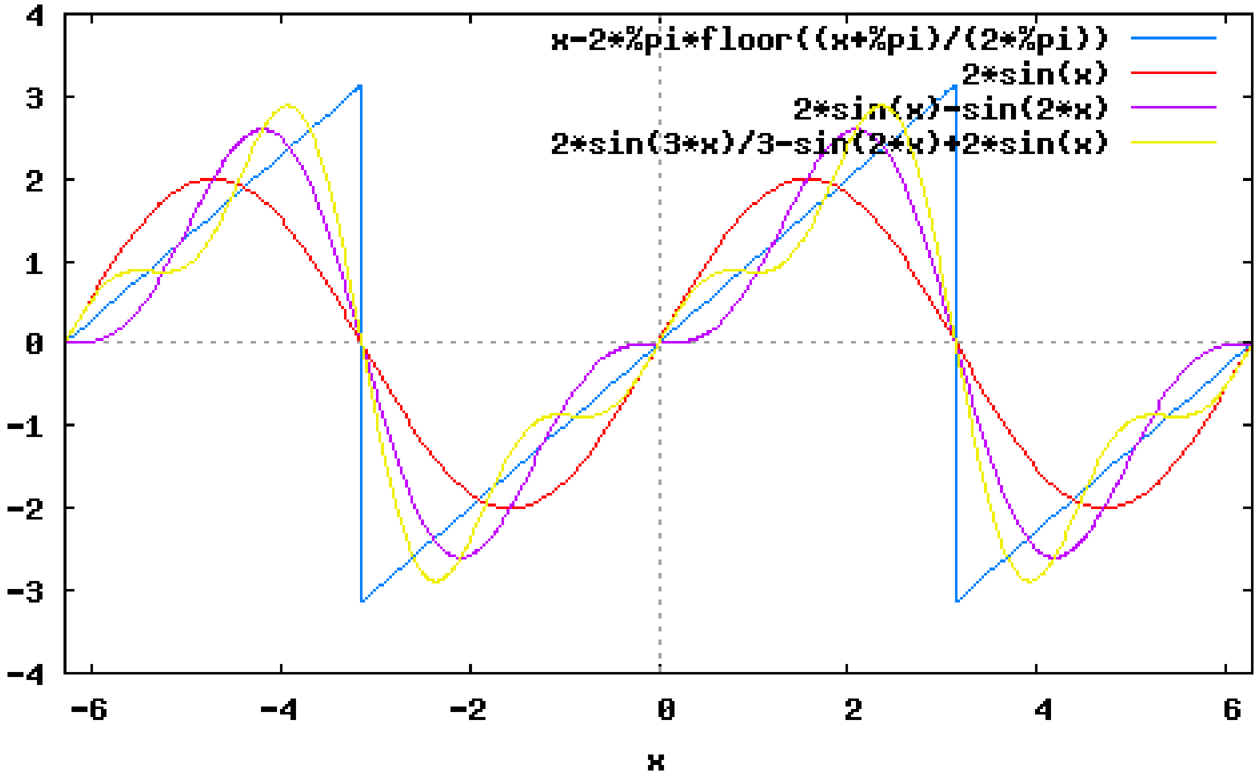
```
load(fourie)

totalfourier(x,x,%pi);
```

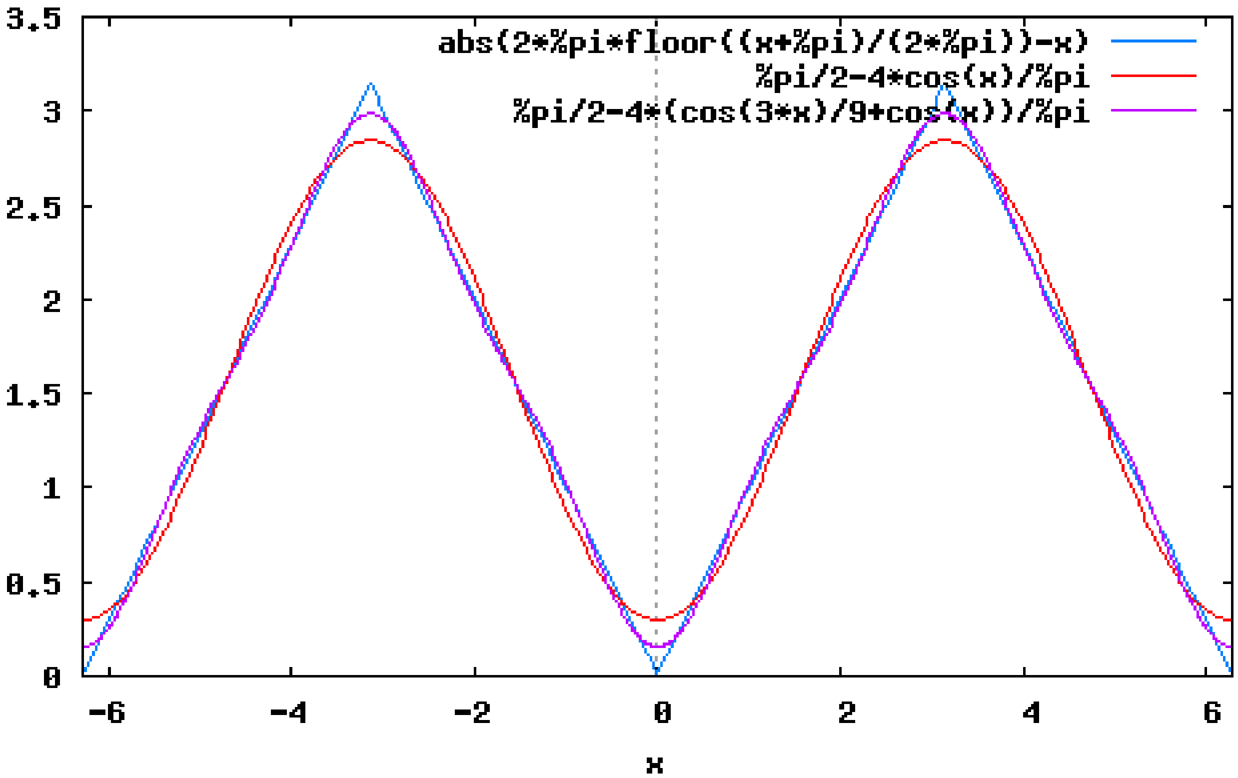
これが命令で，r があったりなかったり，ちょっと悩ましい。fourier という命令もあるが，totalfourier が一番便利そう。出力は，次のよう，TeX フォームで出力したもの。

```
a[n]=0

b[n]=(2*(sin(%pi*n)/n^2-(%pi*cos(%pi*n))/n))/%pi

a[0]=0

a[n]=0

b[n]=-(2*(-1)^n)/n
```

$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\sin(n\,x)}{n}$

フーリエ級数を x と $|x|$ でグラフ化したもの。ファンクション・ビューにはいい例が入ってます。





その２　$f(x)=|\,x\,|$ のときは，遇関数なので $f(x)=a_0+a_1\cos x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$ となり，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\,x\,|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\,x\,|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}0\cdots n:even\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}\cdots n:odd\end{cases}$$

よって，$|\,x\,|=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$

ここで，$x=0$ を代入すると，$\dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$ と**バーゼルの公式**が導けるというわけだ。

$S=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots$ とすると，$S=1+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\right)=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{1}{4}S$

よって，$\dfrac{3}{4}S=\dfrac{\pi^2}{8}\quad\therefore S=\dfrac{\pi^2}{6}$ 見事だ！

```
tex(totalfourier(abs(x),x,%pi))
 a[0]=%pi/2
 a[n]=(2*((%pi*sin(%pi*n))/n+cos(%pi*n)/n^2-1/n^2))/%pi
 b[n]=0
 a[0]=%pi/2
 a[n]=(2*((-1)^n-1))/(%pi*n^2)
 b[n]=0
```

$$\frac{2\sum_{n=1}^{\infty}{\frac{\left(\left(-1\right)^{n}-1\right)\,\cos \left(n\,x\right)}{n^2}}}{\pi}+\frac{\pi}{2}$$

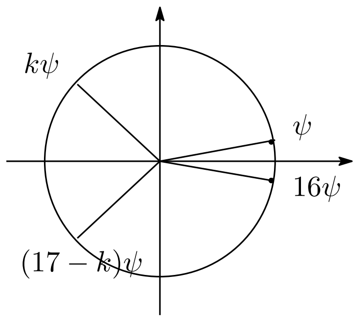
付録　近世数学史談

この写真は Wiki から。Gauss ですね。「近世数学史談」の写真と微妙に違いますねえ。「近世数学史談」はまず Gauss から始まります。この天才のなしたことを教科書のように述べるのではなく，日記とか手紙からその創意を探っています。この写真から自分の印章に「**狭くとも深く**」と刻し,論文の発表も厳格をもってしたという性格がうかがわれるだろうか？

「少なくとも予に於いては高等整数論の研究は今もこの後も数学中最上のもので,如何程美しい天文学上の発見でも高等整数論が与える喜びに比べれば言うに足らないのである」という数学者 Gauss。

その青年 Gauss を数学者になろうと決心させたという問題,「コンパスと定規のみで正十七角形を作図できることを証明」が最初にあります。これも手紙を翻訳したものなので, ちょっとわかりずらい。円周等分論, 即ち方程式 x^n-1 の理論, これを楽しむか。

Gauss はさらに円周等分の拡張としてレムニスケートの等分を考え楕円関数の発見まで進んだとある。



要は $x^{17}-1=0$ を平方根のみで解けばいいということだ。

$17\psi=360^\circ$ とおくと $x=\cos\psi+i\sin\psi$ だから $\cos\psi$ を平方根だけで表せばよい。

$\cos\psi+\cos 4\psi=a, \cos 2\psi+\cos 8\psi=b, \cos 3\psi+\cos 5\psi=c, \cos 6\psi+\cos 7\psi=d, a+b=e, c+d=f$ と組み合わせておくのがミソ。

ここから「よく知られている通りに」とありますが, 自力で行きましょう。

a,b,c,d,e,f の関係式を求めて,$\cos\psi$ が解ければいい。

$z^{17}-1=(z-1)(z^{16}+z^{15}+\cdots+z+1)$ なので $z=\cos\psi+i\sin\psi$ より

$1+\sum_{k=1}^{16}(\cos k\psi+i\sin k\psi)=0$ 実数部分を考えて,$1+\sum_{k=1}^{16}\cos k\psi=0$

ここで,$\cos k\psi=\cos(17-k)\psi$ から

$1+2\sum_{k=1}^{8}\cos k\psi=0$ で,$e+f=-\frac{1}{2}\cdots$①

ここからは巧妙です。

$2ab=2(\cos\psi+\cos 4\psi)(\cos 2\psi+\cos 8\psi)$

$=2\cos\psi\cos 2\psi+2\cos\psi\cos 8\psi+2\cos 4\psi\cos 2\psi+\cos 4\psi\cos 8\psi$

$=\cos 3\psi+\cos\psi+\cos 9\psi+\cos 7\psi+\cos 6\psi+\cos 2\psi+\cos 4\psi+\cos 12\psi$(積を和に直す)

$=e+f=-\frac{1}{2}$ 等などとやって

$2ab=e+f=-\frac{1}{2}, 2ac=2a+b+d, 2ad=b+c+2d, 2bc=a+2c+d, 2bd=a+2b+c, 2cd=e+f=-\frac{1}{2}$

よって $2ac+2ad+2bc+2bd=4a+4b+4c+4d=4(e+f)=-2$

つまり $2ef=-2$ すなわち $ef=-1\cdots$②

①,②より e,f は $x^2+\frac{1}{2}x-1=0$ の解。

a,b,c,d は $x^2-ex-\frac{1}{4}=0, x^2-fx-\frac{1}{4}=0$ の解。

$\cos\psi\cos 4\psi=\frac{1}{2}(\cos 5\psi+\cos 3\psi)=\frac{1}{2}c$ より　$\cos\psi, \cos 4\psi$ は $x^2-ax+\frac{1}{2}c=0$ の解。

で, すべて 2 次方程式を解いていくことで,$\cos\psi$ は求められる。

$z^5-1=0$ で復習すると,$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$\theta=\dfrac{360^\circ}{5}$ とすれば $z=\cos\theta+i\sin\theta$

$1+\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\cos k\theta=0, \cos\theta=\cos 4\theta, \cos 2\theta=\cos 3\theta$ より $\cos\theta+\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)=\dfrac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos\theta)=-\dfrac{1}{4}$

よって $\cos\theta, \cos 2\theta$ は $x^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ の解, すなわち $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

とやらないでも, 方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ は, 高校生は相反方程式で解く。

$z\fallingdotseq 0$ より,$z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$ ここで $z+\dfrac{1}{z}=t$ とおくと (この t が $2\cos\theta$ なんだよな)

$t^2+\dfrac{1}{z^2}=t^2-2$ より $t^2+t-1=0$ 解いて $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ で $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

相反方程式というのもこういう所を考えるところから来ているのかな。

こんなものも入試には登場してます。

12 東北後期

(1)　実数 h に対し，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta, \beta=\cos\theta-i\sin\theta$ とおく。すべての自然数 n に対して，$\alpha^n=\cos n\theta+i\sin n\theta, \beta^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$ が成り立つことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。

(2)　$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ とし，(1) で定めた α, β を考える。$\alpha^7=1$ を示せ。また，k，l は自然数で $k+l$ が 7 の倍数のとき，$\alpha^k=\beta^l$ となることを示せ。

(3)　$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ とし，(1) で定めた α, β を考える。

$A=\alpha+\alpha^2+\alpha^4, B=\beta+\beta^2+\beta^4$ とおいたとき，$A+B, AB$ の値を求めよ。

(4)　$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ のとき，$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta$ の値を求めよ。

答 (1)　略　　(2)　略　　(3)　$A+B=-1, AB=2$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

話はドイツからフランスへ，Gauss から Cauchy へ，そしてロマンチックな Abel，Galois ときて，Gauss の本をかたときも放さなかったという Dirichlet で終わる。数学の天才たちがその性格ゆえ時代の流れにどう乗ったのか，あるいは流されたのか，数学の歴史の中でどういう位置を占めたのか,「解析概論」を読むときに人名が出てくると少しわくわくしますね。

人物伝だけではなくもちろん数学の紆余曲折しながらも進歩していくのも面白いですが，教科書ではなく読み物なので，数式は出てきますが参考にということでしょう。それよりは本文中に出てくる名言がいいです。

「**『幾何学に帝王道路なし』という諺もあるが, 既成数学は実は帝王道路である**」

「**数学の進歩を時代の函数として考えるならば, それは勿論単調に増加する。しかしそのグラフを描いてみるならば, それは所謂滑らかな曲線ではあるまい。… グラフは段階的に進行するのである**」

そのグラフを段階的に一気に増加させるのが天才ということだろう。

「**若しも時世が英雄を生み得なくなるならば, 暗黒時代が来るであろう**」

「**ガウスが進んだ道は即ち数学の進む道である。その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。… 我々は空虚なる一般論に捉われないで, 帰納の一途に精進すべきではあるまいか**」

「**偶然の事情に由ってある問題にからまっている夾雑物を洗い落として, 問題の本質を直視することが, しばしば進歩の鍵である。… 計算は盲目で行当りばったりである。思想は目明きで目標を直視する**」

「Notation（**記号**）**でなく** notion（**概念**）**に由って … 優れた数学者は決して形式屋ではない**」

「**学問の唯一の目標は人間の精神力の発揚**（l'honneur de l'esprit humain）**にあることを知るべきである。**（ヤコービ）」

ヒルベルトを「**不治なる知識追求症**」と称しています。