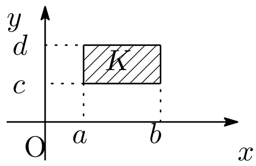
8章　多変数の積分法

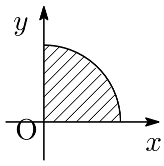
「任意次元の積分は，ある条件の下において，一次元積分の反復（累次積分）に帰着する」

　１つの変数を止めて，後からその変数を動かす考え方は，高校でもよく使われる。

$$\iint_K f(x,y)dxdy$$
$$= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx$$
$$= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy$$



Ex.1



Ex.2

$f(x,y)=1$ なら，K の面積。

Ex.1 長方形の面積

$$\iint_K dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d dy \right\} dx = \int_a^b \left\{ \Big[y \Big]_c^d \right\} dx = (d-c)\int_a^b dx = (d-c)\Big[x \Big]_a^b = (b-a)(d-c)$$

Ex.2 円 $C: x^2+y^2 \leqq r^2$ の面積

$$\iint_C dxdy = 4\int_0^r \left\{ \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right\} dx = 4\int_0^r \left\{ \Big[y \Big]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \right\} dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta d\theta = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 4r^2 \left[\frac{\theta - \dfrac{\sin 2\theta}{2}}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2$$

何故なら，$x = r\sin\theta$ とおくと，$dx = r\cos\theta d\theta$，
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & r \\ \hline \theta & 0 & \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

体積も求めることができる。

Ex.3 三角錐の体積

$V: x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} \leqq 1$ とすると，この体積は

$K: x \geqq 0, y \geqq 0, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \leqq 1$ として，

$$\iint_K c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy = c\int_0^a \left\{ \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy \right\} dx$$

$$= c\int_0^a \left\{ \left[\left(1-\frac{x}{a}\right)y - \frac{y^2}{2b} \right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \right\} dx = \frac{bc}{2}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \left[-\frac{abc}{6}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3 \right]_0^a = \frac{abc}{6}$$

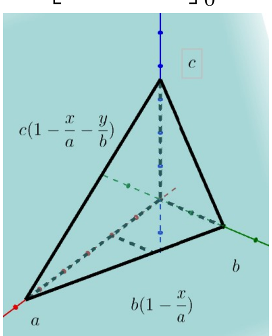
Ex.4 球の体積

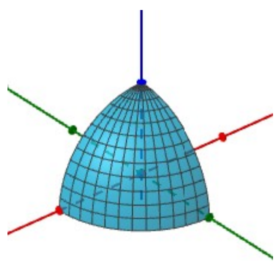
$V: x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0, x^2+y^2+z^2 \leqq r^2$ とすると，球の体積は

$K: x \geqq 0, y \geqq 0, x^2+y^2 \leqq r^2$ として，

$$8\iint_K \sqrt{r^2-x^2-y^2}dxdy = 8\int_0^r \left\{ \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}dy \right\} dx$$

$$= 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}$$





　某大学の編入試験から聞かれたのが次の問題。

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leqq x+y\leqq 1, 0\leqq x-2y\leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\int\int_D(3x+2y)dxdy$

変数変換して，累次積分ができるようにする。

$x+y=u, x-2y=v$ つまり，$x=\dfrac{2u+v}{3}, y=\dfrac{u-v}{3}$ とすると，

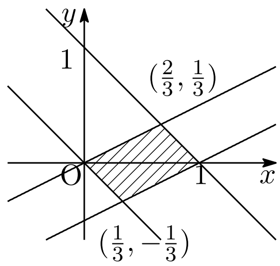
$E=\{(u,v)\in|0\leqq u\leqq 1, 0\leqq v\leqq 1\}$ のとき，$\dfrac{1}{3}J\displaystyle\int\int_E(8u+v)dudv$

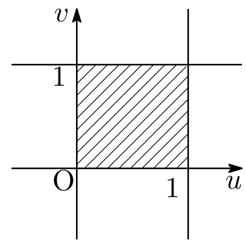
$dxdy=Jdudv$

この場合，$J=\left|\dfrac{2}{3}(-\dfrac{1}{3})-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$

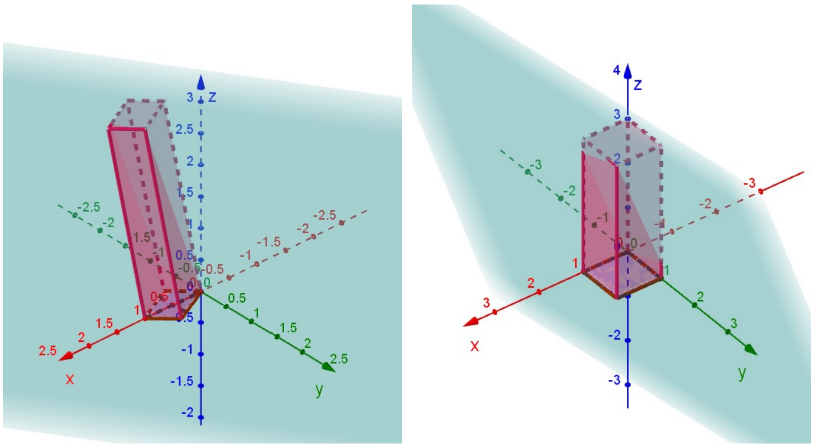
面積が $\dfrac{1}{J}$ 倍になってしまうので，

J 倍するわけだ。





$$\frac{1}{9}\int_0^1\int_0^1(8u+v)dudv=\frac{1}{9}\int_0^1\left\{\Big[4u^2+uv\Big]_0^1\right\}dv=\frac{1}{9}\int_0^1(4+v)dv=\frac{1}{9}\left[4v+\frac{v^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$



直方体を半分にした立体。

J というのは，変数変換の計算でヤコビアンといわれる。

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

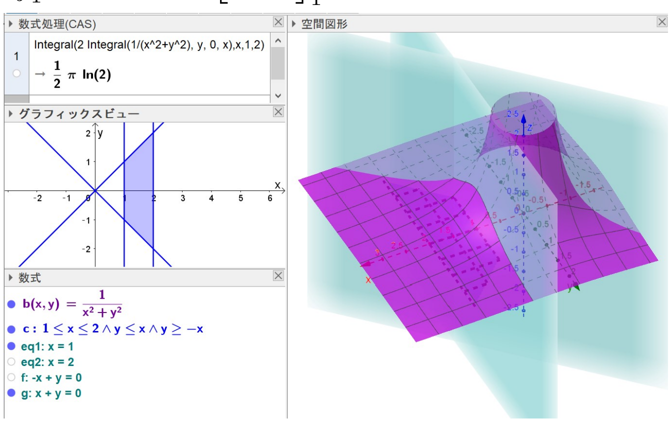
もうひとつ（毎年出てるな）

$E=\{(x,y)\in|1\leqq x+y\leqq 2, x\geqq 0, y\geqq 0\}$ のとき，$\displaystyle\int\int_E\frac{dxdy}{x^2+y^2}$

$x+y=u, x-y=v$ つまり，$x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{u-v}{2}$ とすると，$J=\dfrac{1}{2}$

$D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|1\leqq u\leqq 2, u+v\geqq 0, u-v\geqq 0\}$ のとき，$\displaystyle\int\int_D\frac{dudv}{u^2+v^2}$

$$=2\int_1^2\int_0^u\frac{dv}{u^2+v^2}du=2\int_1^2\frac{\pi}{4u}du=\frac{\pi}{2}\Big[\log u\Big]_1^2=\frac{\pi}{2}\log 2$$



最後に応用として，２つ。

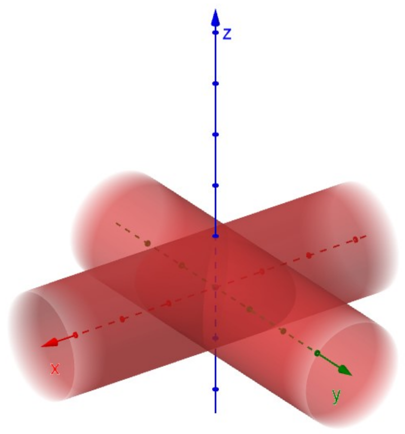
Ex.5 円柱の交わり

円柱を $y^2+z^2=r^2, x^2+z^2=r^2$ として，高校生は $z=k$ の切断面が正方形となることを使うが，

$D: y^2+z^2 \leqq r^2, y \geqq 0, z \geqq 0$ として，

$$8\int\int_D \sqrt{r^2-z^2}dydz = 8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}}\sqrt{r^2-z^2}dydz = 8\int_0^r\left[\sqrt{r^2-z^2}y\right]_0^{\sqrt{r^2-z^2}}dy$$

$$= 8\int_0^r(r^2-z^2)dz = 8\left[r^2z-\frac{z^3}{3}\right]_0^r dz = \frac{16r^3}{3}$$



高校生流　第一象限で考えて，

$x^2+z^2=r^2, y^2+z^2=r^2$ 連立すると，$y=x$

$(\sqrt{r^2-z^2}, \sqrt{r^2-z^2}, z)$ を１頂点とする正方形の

面積は $4(r^2-z^2)$

よって，求める体積は $8\int_0^r(r^2-z^2)dz$

こっちのほうが楽か。

Ex.6 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ の証明

この証明は $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ を使うものがあるが，実に面倒。

$\int_0^a e^{-x^2}dx = I, R: 0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq a, C: x^2+y^2 \leqq a^2, x \geqq 0, y \geqq 0$ として，$a \to \infty$ とすると，

$\lim_{a\to\infty} R = \lim_{a\to\infty} C$ 第一象限。

$$\int\int_R e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy = I^2$$

ここで変数変換，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ すると，$J = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-2}\left[e^{-r^2}\right]_0^a d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{-a^2}}{2}d\theta = \frac{1-e^{-a^2}}{2}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-e^{-a^2}}{2}\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{4}$$