2章　微分法　接線及び曲率（curvature ）

曲がり具合（**曲率**）を定義して，その逆数が**曲率半径**（ρ）。曲線を円で近似するといういうことかな。

$\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{\rho}$，$\theta$ は接線と x 軸の正の向きの作る角，s は曲線の長さ。

これの計算式を作る。具体的には θ を消去する。本では 3 次元から始めてますが，媒介変数（t）表示された 2 次元の曲線で作ります。

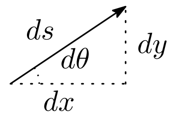
計算が面倒なので，結論から書きます。

$$\frac{1}{\rho}=\frac{dxd^2y-d^2xdy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,\ y=f(x)\text{ なら }\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

以下，計算に興味ある人はどうぞ（本とは少し違う方法）。合成関数の微分の公式を使って，

$\dfrac{dx}{ds}=\cos\theta,\dfrac{dy}{ds}=\sin\theta,$

$\dfrac{d^2x}{ds^2}=-\sin\theta\dfrac{d\theta}{ds}=-\dfrac{\sin\theta}{\rho},\dfrac{d^2y}{ds^2}=\cos\theta\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{\cos\theta}{\rho}$



よって，$\dfrac{dx}{ds}=\rho\dfrac{d^2y}{ds^2},\dfrac{dy}{ds}=-\rho\dfrac{d^2x}{ds^2}$

この ds を dt に変換すればいい。$\dfrac{dx}{ds}=x',\dfrac{dx}{dt}=\dot{x}$ 等として，$x'=\rho y'',y'=-\rho x''$

さあ変換，$x'=\dot{x}\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{\dot{x}}{\dot{s}},y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{s}}$

次が面倒，$x''=\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dt}{ds}\right)\dfrac{dt}{ds}=\left\{\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dt}{ds}+\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\dfrac{ds}{dt}}\right)\right\}\dfrac{dt}{ds}$

$$=\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dt}{ds}-\frac{dx}{dt}\left(\frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}\right)^2\frac{d^2s}{dt^2}\right\}\frac{dt}{ds}=\left(\frac{\ddot{x}}{\dot{s}}-\frac{\dot{x}\ddot{s}}{\dot{s}^2}\right)\frac{1}{\dot{s}}=\frac{\ddot{x}\dot{s}-\dot{x}\ddot{s}}{\dot{s}^3},y''=\frac{\ddot{y}\dot{s}-\dot{y}\ddot{s}}{\dot{s}^3}$$

作ります。$x'^2+y'^2=1$ より，$x'\rho y''-y'\rho x''=1$ つまり，$\dfrac{\dot{x}}{\dot{s}}\dfrac{\ddot{y}\dot{s}-\dot{y}\ddot{s}}{\dot{s}^3}-\dfrac{\dot{x}}{\dot{s}}\dfrac{\ddot{x}\dot{s}-\dot{y}\ddot{s}}{\dot{s}^3}=\dfrac{1}{\rho}$

できた。$\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{s}^3}$

これで曲率円がかける。接線方向を 90° 回転した方向に半径 ρ だけ進んだのが中心 $(x-\rho\sin\theta,y+\rho\cos\theta)$。Geogebra で実験できる。と思ったら，曲率と曲率ベクトル（点から曲率円中心見向かう方向で，曲率が大きさのベクトル）が，用意されているのだった。簡単に曲率円がかける。

$y=\sin x$ で試してみると，