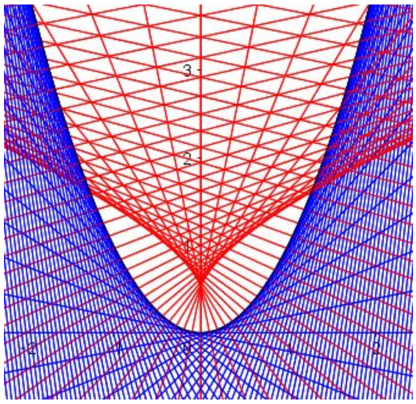
7章　微分法の続き　包絡線（envelope）

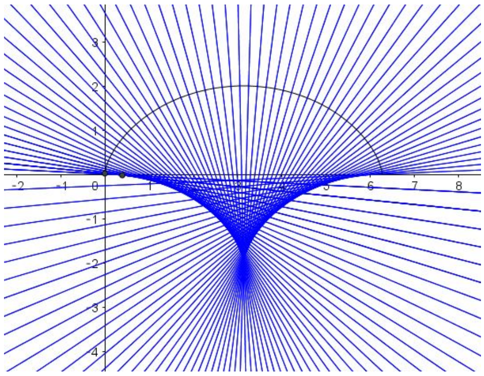
　広辞苑と「解析概論」の定義を混ぜて，包絡線 (envelope：封筒のイメージか) とは，
ある一群の曲線のすべて（曲線族 $f(x,y,\alpha)=0$）に接する定曲線があるとき，これをその曲線群の包絡線という。例えば，一定点からの距離が一定な直線群の包絡線は円である。
前の「伸開線と縮閉線」で既述であるが，接線の包絡線がその曲線自身，**法線の包絡線が縮閉線**。高校では通過領域の境界として，大学入試問題に出たりする。「解析概論」では，曲率から縮閉線を導いていたが，計算は後ろにある，この包絡線のほうが楽。本にはないので，その計算を書いてみよう。
　簡単な例で，考え方をすべて説明しよう。

「例 1」放物線 $y=x^2$
この上の点 (t,t^2) における接線の方程式は $y'=2x$ だから，
$y-t^2=2t(x-t)$ つまり $y=2tx-t^2\cdots$①
下に凸な曲線だから，接線の通過領域は，
もちろん $y\leqq x^2$（右図の青い部分）
(i)①を t の 2 次方程式と見ると，$t^2-2xt+y=0$
この方程式が実数解を持つ条件として，
判別式を D とすると $D/4=x^2-y\geqq 0$ つまり $y\leqq x^2$
(ii)①を t の 2 次関数と見ると，$y=-t^2+2xt=-(t-x)^2+x^2\leqq x^2$
通過領域を問う入試問題でも両方の方法を知っていたほうが得。
その境界は $y=x^2$ 接線の包絡線は曲線それ自身。



次に，法線の方程式は $y-t^2=-\dfrac{1}{2t}(x-t)$ つまり $x+2ty=2t^3+t\cdots$②（$t=0$ でも成立）
(i)②を t の 3 次方程式と見ると，$2t^3+(1-2y)t-x=0$
3 次方程式は少なくとも 1 つ実数解を持つから通過領域の問題はありえない。というか，平面全体。
しかし包絡線はたしかにあって（図の赤い密な部分），それを求めるには②が重解を持つ条件を求めればいい。
となれば，また方法は（微分して極値が 0 とか）色々あるが，方程式にこだわると次のようにも解ける。
解を α(重解), β とおくと，解と係数の関係により，$2\alpha+\beta=0, \alpha^2+2\alpha\beta=1-2y, \alpha^2\beta=x$
$\beta=-2\alpha$ より，$1-2y=-6\alpha^2, x=-4\alpha^3$ よって，$27x^2=2(2y-1)^3$ が縮閉線。
この方程式論より楽な方法が，包絡線一般についての次の方法（「概論 § 88」）。
②を t で微分して，それと連立して x,y について解けば，それが接点で，その軌跡が包絡線。
微分すると $2y=6t^2+1$ よって，$x=-4t^3, y=3t^2+\dfrac{1}{2}$　つまり，$27x^2=2(2y-1)^3$ が縮閉線。
曲線族 $f(x,y,\alpha)=0$ の包絡線は，媒介変数 α で微分した式と連立して，x,y を求めればいい。
接線だから微分した式は成立し，元の曲線の式を満たすのだから接点が満たす式だというわけだ。

「例 2」サイクロイド $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ の縮閉線



法線の方程式は，$y-a(1-\cos t)=-\dfrac{1-\cos t}{\sin t}\{x-a(t-\sin t)\}$

整理して，$(1-\cos t)x+\sin ty=at(1-\cos t)$,

微分して，$\sin tx+\cos ty=a(1-\cos t)+at\sin t$

これを連立して解く。

高校から行列がなくなったのは残念だ。

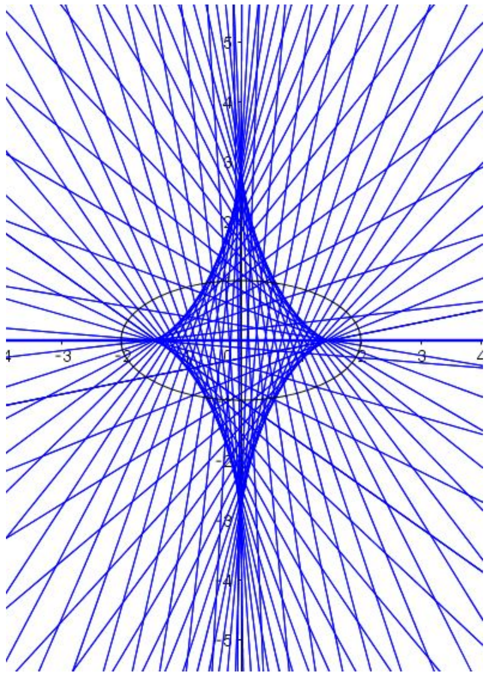
まあ，普通に連立方程式を解けばいいのだが。

つまり，$\begin{pmatrix}1-\cos t & \sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at(1-\cos t)\\ a(1-\cos t)+at\sin t\end{pmatrix}, \Delta=(1-\cos t)\cos t-\sin^2 t=\cos t-1$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{a}{\cos t-1}\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ -\sin t & 1-\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t(1-\cos t)\\ (1-\cos t)+t\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(t+\sin t)\\ a(-1+\cos t)\end{pmatrix}$

サイクロイドの縮閉線はサイクロイド。

「例 3」楕円の縮閉線



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(a\cos t, b\sin t)$ での接線の方程式は,

$\dfrac{\cos t}{a}x+\dfrac{\sin t}{b}y=1$ だから，法線の方程式は,

$\dfrac{\sin t}{b}(x-a\cos t)-\dfrac{\cos t}{a}(y-b\sin t)=0$

整理して，$a\sin tx-b\cos ty=\dfrac{a^2-b^2}{2}\sin 2t$

t で微分した，$a\cos tx+b\sin ty=(a^2-b^2)\cos 2t$

連立して x, y について解くと,

$\begin{pmatrix}a\sin t & -b\cos t\\ a\cos t & b\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{a^2-b^2}{2}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ 2\cos 2t\end{pmatrix}, \Delta=ab$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\begin{pmatrix}b\sin t & b\cos t\\ -\cos t & a\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ 2\cos 2t\end{pmatrix}$

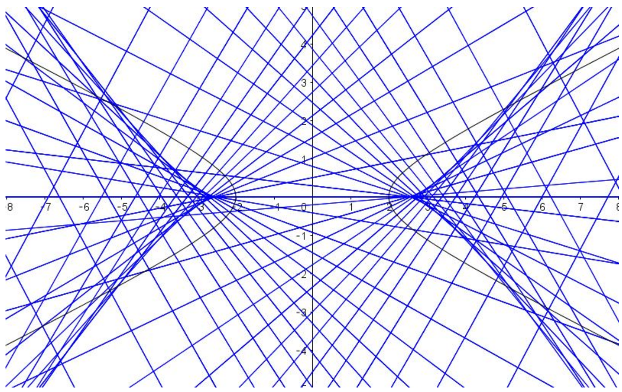
これが整理できて,

$x=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, y=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$

つまり，$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$ **楕円の縮閉線はアステロイド**

「例 4」双曲線の縮閉線，これは本にないです。

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(\dfrac{a}{\cos t}, b\tan t)$ での接線の方程式は,



$\dfrac{x}{a\cos t}-\dfrac{\tan t}{b}y=1$ だから，法線の方程式は,

$\dfrac{\tan t}{b}(x-\dfrac{a}{\cos t})+\dfrac{1}{a\cos t}(y-b\tan t)=0$

整理して，$a\sin tx-by=(a^2+b^2)\tan t$

t で微分した，$a\cos tx=(a^2+b^2)\dfrac{1}{\cos^2 t}$

連立して x, y について解くと,

$\begin{pmatrix}a\sin t & b\\ a\cos t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(a^2+b^2)\begin{pmatrix}\tan t\\ \dfrac{1}{\cos^2 t}\end{pmatrix}, \Delta=-ab\cos t$

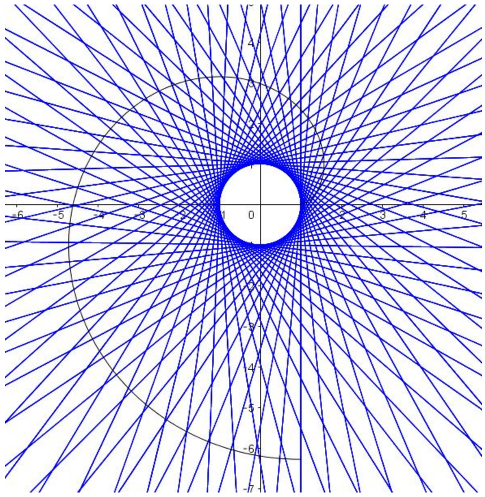
$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{a^2+b^2}{-ab\cos t}\begin{pmatrix}0 & -b\\ -a\cos t & a\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tan t\\ \dfrac{1}{\cos^2 t}\end{pmatrix}$ これが整理できて,

$x=\dfrac{a^2+b^2}{a}\dfrac{1}{\cos^3 t}, y=\dfrac{a^2+b^2}{b}\tan^3 t$ つまり，$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$ アステロイドくずれ（？）。

「例 5」円の伸開線（$x=\cos t+t\sin t, y=\sin t-t\cos t$）の縮閉線は円（って，当たり前だけど）

点 $(\cos t+t\sin t, \sin t-t\cos t)$ での法線の方程式は,

$y-\sin t+t\cos t=-\dfrac{\cos t}{\sin t}(x-\cos t-t\sin t)$



整理して，$\cos tx+\sin ty=1$

t で微分した，$\sin tx-\cos ty=0$

連立して x,y について解くと,

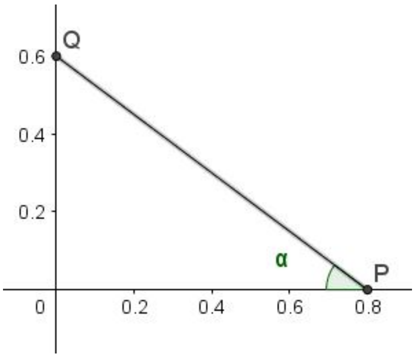
$$\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\Delta=-1$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$x=\cos t, y=\sin t$

最後に「概論」にある問題，関連した問題は大学入試にもよく出る。

「例 6」定長 l なる線分の両端が直交軸上を動くときの包絡線。 l は本質的ではないので 1 として,



変数 α を左図のように決める。

すると，直線 PQ の方程式は $\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}=1$

よって，$x=\cos^3\alpha, y=\sin^3\alpha$ とすると上手く式は成立する。

じゃないですよ。

α で微分すると，$\dfrac{x\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}\begin{pmatrix}\cos\alpha\sin^2\alpha & \cos^2\alpha\sin\alpha\\ \sin^3\alpha & -\cos^3\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\Delta=-\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^3\alpha & \cos^2\alpha\sin\alpha\\ \sin^3\alpha & -\cos\alpha\sin^2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$ よって，$x=\cos^3\alpha, y=\sin^3\alpha$

媒介変数を，上のような α にとらずに，直線を表す t ととれば（お茶の水 20 年度の入試問題），

P$(p,0)$,Q$(0,q)$ とすると，$p^2+q^2=1$,PQ を $t:1-t$ に内分する点の座標 (x,y) は，$((1-t)p, tq)$,

$p=\dfrac{x}{1-t}, q=\dfrac{y}{t}\quad(0<t<1)$ から $\dfrac{x^2}{(1-t)^2}+\dfrac{y^2}{t^2}=1$

「例 7」楕円族 $\dfrac{x^2}{(1-t)^2}+\dfrac{y^2}{t^2}=1$ の包絡線

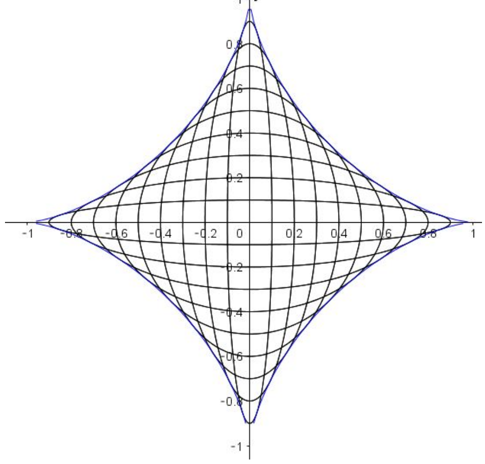
これが成り立つのは $x=(1-t)^{\frac{3}{2}}, y=t^{\frac{3}{2}}$ じゃないですよ。

$t^2x^2+(1-t)^2y^2=t^2(1-t)^2$ を t で微分して整理して,

$tx^2-(1-t)y^2=t(1-t)(1-2t)$

$$\begin{pmatrix}t^2 & (1-t)^2\\ t & -(1-t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-t)^2t^2\\ t(1-t)(1-2t)\end{pmatrix},\Delta=-(1-t)t$$

$$\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t & (1-t)^2\\ t & -t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1-t)t\\ 1-2t\end{pmatrix}$$



よって，$x^2=(1-t)^3, y^2=t^3$

で，$x=(1-t)^{\frac{3}{2}}, y=t^{\frac{3}{2}}$　　で，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$