3章　積分法（曲線の長さ　と　閉曲線で囲まれた部分の面積）

　数 III の教科書には，平面上の曲線として，陰関数表示とか媒介変数表示とか極方程式が登場。

2 次曲線は放物線，楕円，双曲線も媒介変数表示として可能。

そのうち，円と放物線は長さが計算できるとしている。

極方程式も媒介変数表示として可能。$r = f(\theta)$ なら $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$

媒介変数表示のサイクロイド，リサージュ曲線，アステロイドがあらわれ，

極方程式でアルキメデスの渦巻線，正葉曲線（rose curve という名前のほうがいいなあ），カージオイドなどがあらわれる。

ここでは，具体的にそれらの曲線の長さと，面積を考察しようということです。

　曲線の長さは $\displaystyle\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ 特に，$\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

また特に，極方程式 $r = f(\theta)$ なら $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ で

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(f'\cos\theta - f\sin\theta)^2+(f'\sin\theta+f\cos\theta)^2} = \sqrt{(f')^2+f^2}$$

よって，$\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{(f')^2+f^2}\,d\theta$

　面積について，線積分を定義して，その応用として閉曲線で囲まれた部分の面積を求める公式がある。最近は，これが色々の所で入試問題を解く裏技みたいに解説されている。

簡単にいうと $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left|\frac{dx}{dt}y - x\frac{dy}{dt}\right|dt$

$O, P(x, y), P(x+\Delta x, y+\Delta y)$ の微小三角形の面積 $\dfrac{1}{2}|\Delta x\cdot y - x\cdot\Delta y|$ として「幾何学上の意味は明白である」とある。

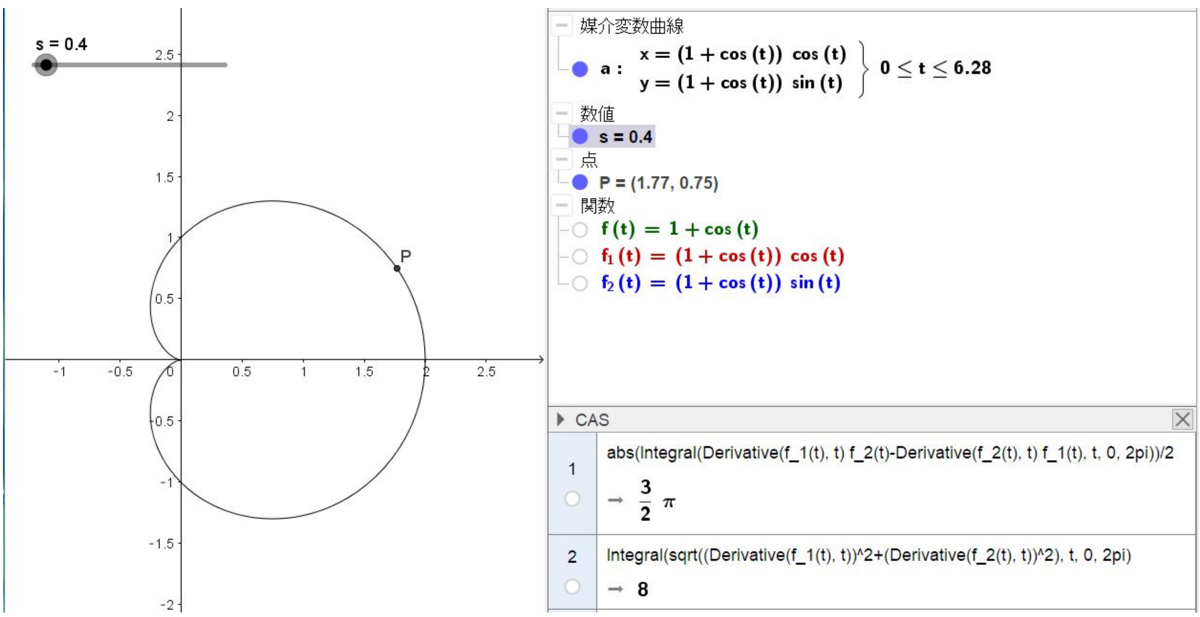
面積の方も，極方程式の場合は簡単に整理できて，

$$\frac{dx}{dt}y - x\frac{dy}{dt} = (f'\cos\theta + f(-\sin\theta))(f\sin\theta) - (f\cos\theta)(f'\sin\theta+f\cos\theta) = -f^2$$

よって，$S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} f^2\,d\theta$

　さあ，具体例を見てみよう。

まず，極方程式の例としてカージオイド，正葉曲線，媒介変数表示の例として，アステロイド，リサージュ。



$f(t)$ の部分を新たに入れると，瞬時に長さと面積を計算してくれるわけね。（0 から 2π の範囲ですけど）

この面積を普通に（$\int y\,dx$）やろうと思うと，大変です。

バラ曲線は $n=1$ のとき（これはバラ曲線とはいわないのだろうが），

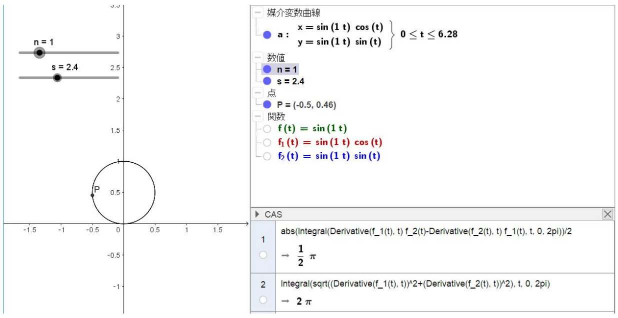
$x=\sin t\cos t=\dfrac{\sin 2t}{2}$,

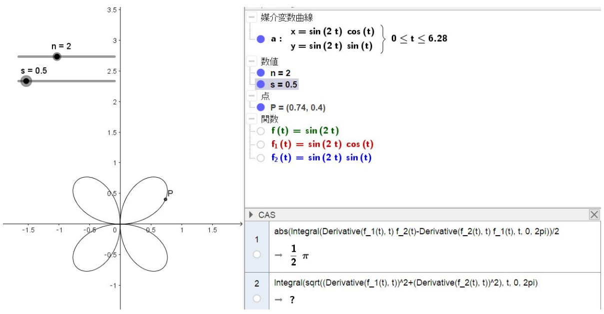
$y=\sin t\sin t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

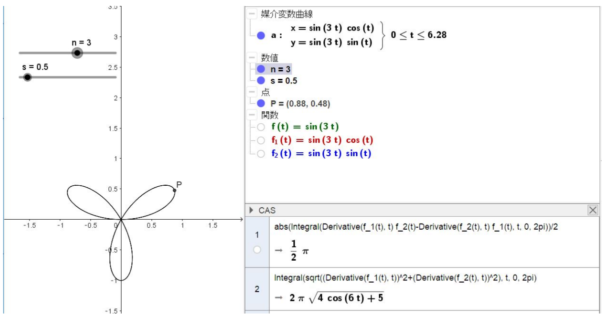
よって，$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

半径 $\dfrac{1}{2}$ の円なのに，面積・長さが 2 倍なのは，

0 から 2π で 2 回転しているから。



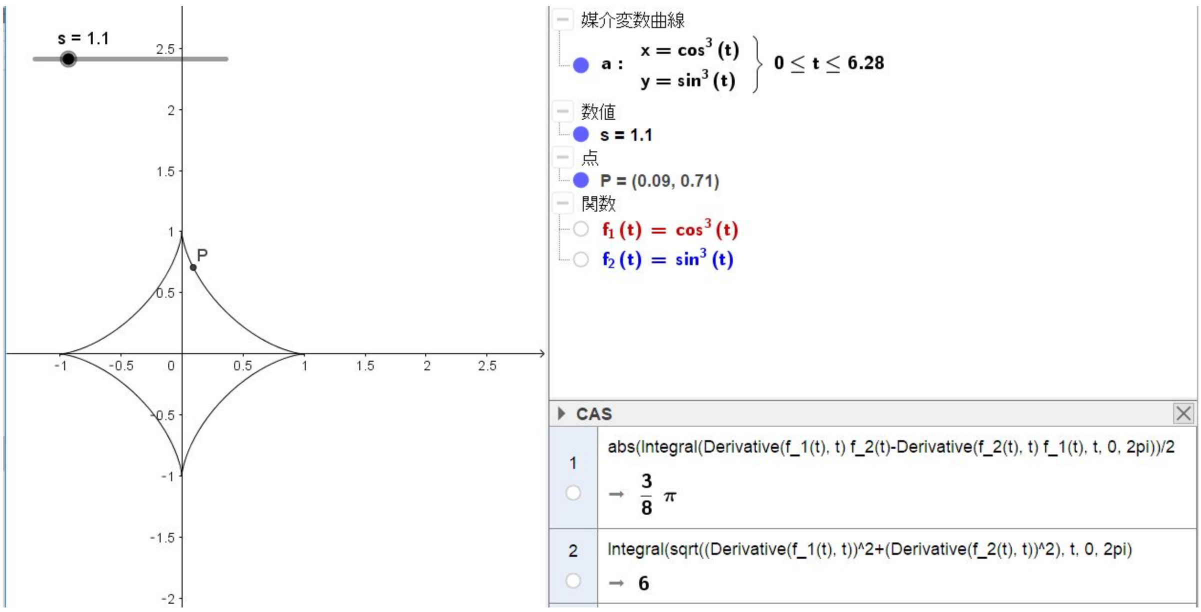




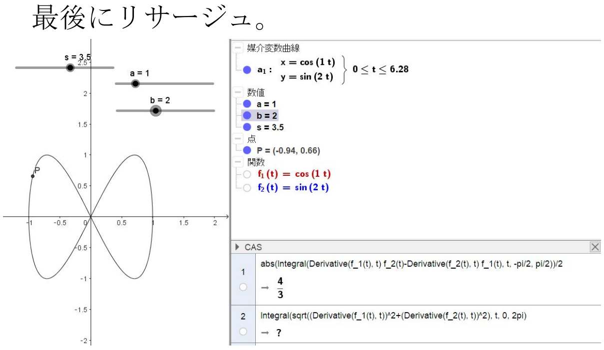
なんとバラ曲線は面積一定です。（計算すれば納得）

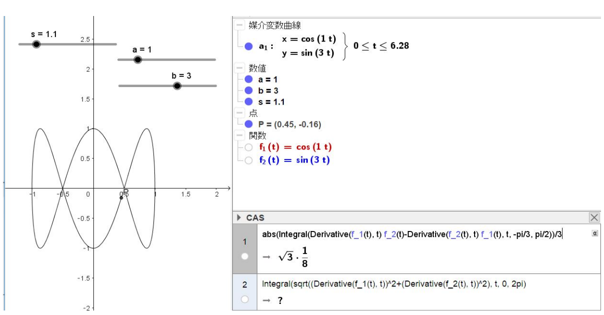
長さはほとんど計算できずですが，$n=3$ のときの答えは，Geogebra のバグですかね。

アステロイド



最後にリサージュ。





積分範囲に注意してください。左は $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$, 左は $-\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{\pi}{3}$

閉じた領域を囲む向きが違うから，0 から 2π までだと 0 になってしまう。