8章　積分法（多変数）Guldinの法則

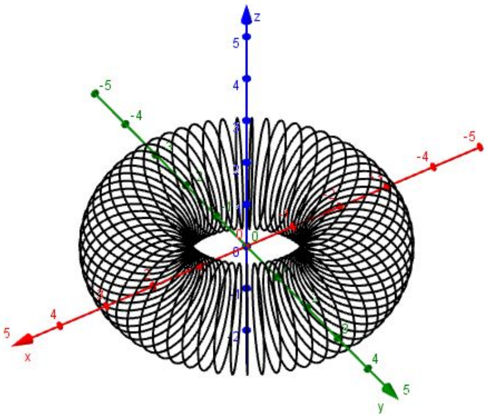
　微分幾何の話のあとで，**Guldinの法則**が回転体の側面積と体積で登場する。

辞書には「4世紀ころアレクサンドリアのパッポス Pappos(ラテン名パップス Pappus) が発見，のちギュルダン P. Guldin(1577-　1643) によって再発見された」ある。

> 回転体の面積は，（母線の長さ）×（母線の重心の画く円周の長さ）
> 回転体の体積は，（子午線面の面積）×（子午線面の重心の画く円周の長さ）

例はトーラス（torus）

$S = 2\pi r \times 2\pi a = 4\pi^2 ar, V = \pi r^2 \times 2\pi a = 2\pi^2 ar^2$



体積の方だけ証明すると，

母線の方程式を $x = f(z)(a \leqq z \leqq b)$ とすると，

z　軸の周りに一回転させた回転体の体積は $\pi\displaystyle\int_a^b \{f(z)\}^2 dz$

断面積S，重心の x 座標を s とすると，重心の定義より

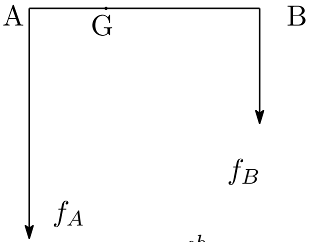
$s = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S x dx dz = \dfrac{1}{S}\int_S f(z)f'(z)dzdz$

$= \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S f(z)df(z)dz = \dfrac{1}{2S}\int_a^b \{f(z)\}^2 dz = \dfrac{1}{2S}\dfrac{V}{\pi}$

よって $V = S \times 2\pi s$

重心の定義の部分がちょっと高校生には無理だ。

これをバウムクーヘンの公式を使っている証明がネットにあったので紹介しよう。

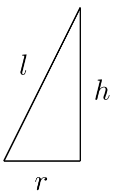


まず重心の定義から確認する。G を重心としその位置を x_G ，A,B の位置を x_A, x_B そこで働く力を f_A, f_B とそれぞれおくと，モーメントが釣り合うのは $f_A(x_G - x_A) = f_B(x_B - x_G)$　移項して　$(f_A + f_B)x_G = x_A f_A + x_B f_B$

連続化して $g\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx$　両辺に 2π をかけて $2\pi g\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

で，右辺はバウムクーヘンの公式そのもの。

　円錐で試し，h の周りに一回転。



$$S = l \times 2\pi\frac{r}{2} = \pi lr$$
$$V = \frac{1}{2}hr \times 2\pi\frac{r}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

　これ（重心の位置から体積を求める）を逆にすると，体積から重心の位置を求めることができる。これも「概論」には言葉だけ書いてある。

それで重心ゴマを作って遊びました，というのがこのホームページの「N高校数学班」の重心を求めるプログラムにあります。

一つだけ書いておくと，半円の重心。

x 軸の周りの体積は $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\pi r^2}{2} \times 2\pi h$ だから $h = \dfrac{4r}{3\pi}$