包絡線の応用　火線・楕円・双曲線

前に伸開線と縮閉線について書きました。そのときこの例として,「水が入ったコップに光が当たってできるときにできる線」というのを，どこかで読んだ気がする，なんて書きましたが，ありました。「物理数学の道具箱」という本です。そう難しくなく，しかもいつものファンクション・ビューで見ることができるので，紹介しましょう。

放物線の場合，平行線が焦点に集まるのは有名です。球の場合に，これと同じにやればいいだけのことでした。広辞苑では次のように正確な定義がされています。

か - せん**【火線】**クワ‥平行光線が凹面鏡によって反射される時、反射光線が正確に１点（焦点）に集まらないで、相互に交わってできる包絡線。

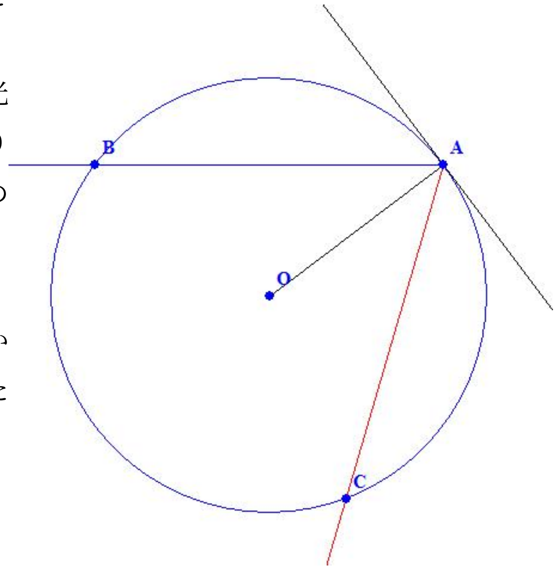
英語では caustic (コースティック　ギリシャ語燃えるの意) curve

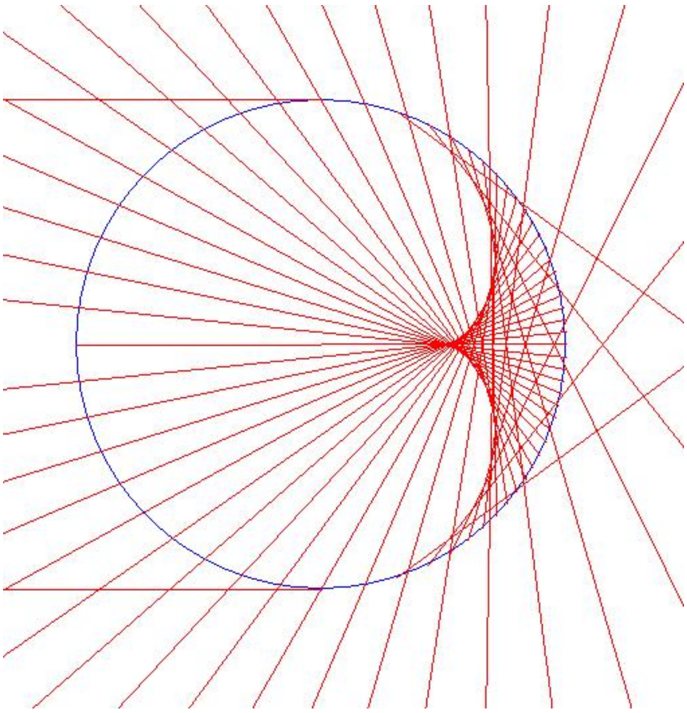
さて，球面に平行線が当たっているとして，その反射光を追ってみる。

右図の BA が平行入射光線，A で反射して AC が反射光線。A における接線で入射角と反射角が等しくなる（つまり $\angle BAO = \angle CAO$，もちろん O は円の中心）ように C を決めればいい。

この赤い線の包絡線が火線。

そいつを見てみれば，下図。カージオイド（心臓型）ともかいてあるので，その一部なのだろうが，それを示すのはまた別の話題だ。





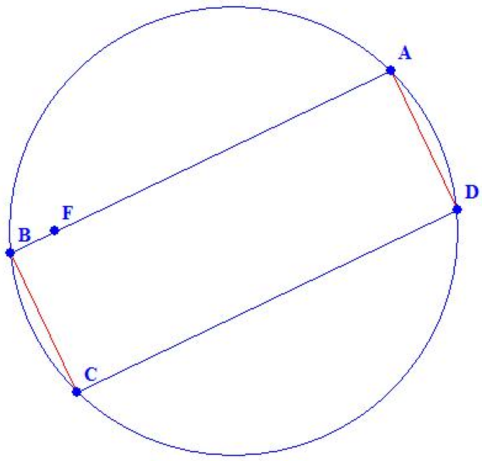
スペースが余ったので，ファンクション・ビューの式もあげておく。変数を最初から角度にとる手もあったが，そうすると平行直線が均一にならないので，$A(t, \sqrt{1-t^2})$ とした。

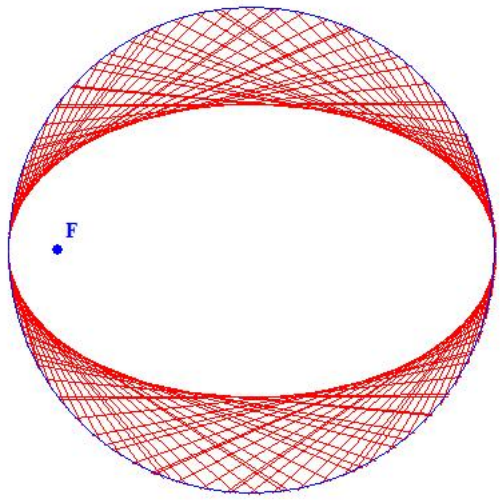
$\theta = arcsin(\sqrt{1-t^2})$ とすると，計算することにより（中心と C，B を結び中心角を考える）C の座標が，$(\cos(3\theta - \pi), \sin(3\theta - \pi))$ つまり，$(-\cos 3\theta, -\sin 3\theta)$ となる。

直線も計算すると $\sin 2\theta x - \cos 2\theta y = \sin\theta$ と簡単になる。この θ が存在するような x, y の条件からカージオイドの方程式が出るんだろう。ちょっとやったけど複雑だなあ。

せっかくだからこの本によって，ほかのも包絡線で描くと。

楕円は定点 F を通る定円に内接する長方形の辺（図で AD と BC）の包絡線。





これについては，存在領域として楕円の式が出せます。

$a(0 < a < 1)$ を固定し $P(\cos\theta, \sin\theta)$ として，

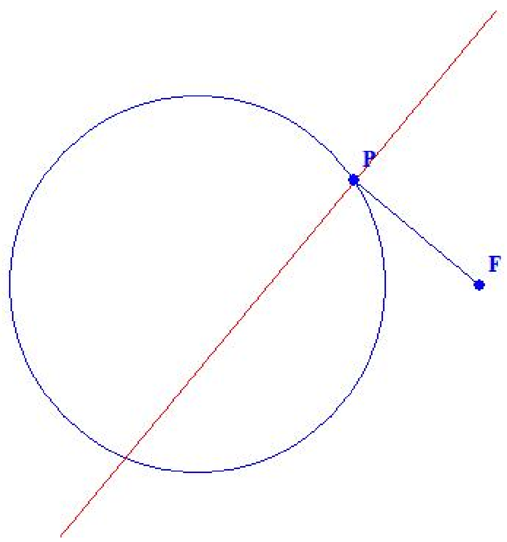
図の AD（AD だけでも楕円ができる）は $(a + \cos\theta)x + \sin\theta \cdot y = a\cos\theta + 1$

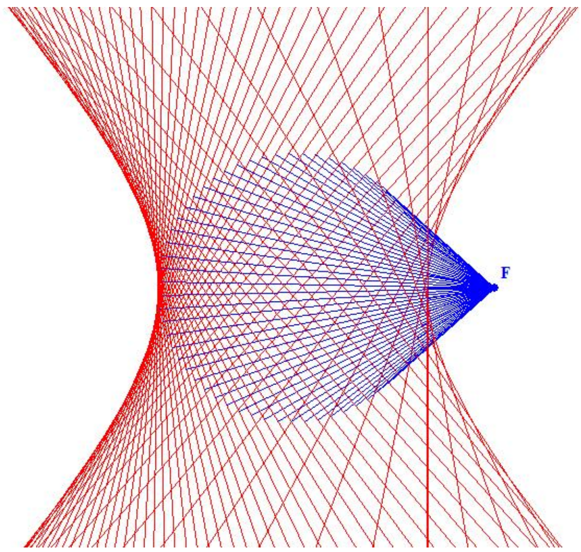
これをみたす θ が存在すればいいので，$y\sin\theta + (x - a)\cos\theta = 1 - ax$ として合成し

$\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sin(\theta + \alpha) = 1 - ax$ つまり $\dfrac{|1 - ax|}{(x-a)^2 + y^2} \leqq 1$ これを整理すると

$x^2 + \dfrac{y^2}{1 - a^2} \geqq 1$ 楕円の外部となる。

双曲線は定点 F と定円上の点 P と P で直交する直線の包絡線。





これも上と同様に，直線の式は $(a - \cos\theta)x - \sin\theta \cdot y = 1 - a\cos\theta$ これをみたす θ が存在すればいいので，$y\sin\theta + (x - a)\cos\theta = ax - 1$ として合成し $\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sin(\theta + \alpha) = ax - 1$ つまり $\dfrac{|ax - 1|}{(x-a)^2 + y^2} \leqq 1$

これを整理すると　$x^2 - \dfrac{y^2}{a^2 - 1} \leqq 1$ 双曲線の内部となる。

この存在領域については私のオリジナル。結構きれいで問題としていけるな。いつか出してやろう。