# 「解析概論・再読」

高校生に。問題を解いていて，何故こういう問題があるのだろうとか思ったことはありませんか。これは，教科書＋$\alpha$の内容で，さらに数学の興味を深めて欲しい，という願いから計画したものです。「解析概論」は無くてもいいですし，大学入試問題からも問題を選んであるので入試対策にもなりますよ。
数学が趣味の人に。解析概論はとてもいい本で，読み直すと興味は尽きません。高校の数学が好きだった人のために，もう少し進むととても面白いことがわかります。
もちろん私のためにも。Maxima とか Function View とか，コンピュータは思考の道具です。伝達の道具でもあります。楽しめました。

ファイルが大きいので 3 部に分けた。

1st-1
1　基礎的な概念　2 進数　e の存在～p.9
　円周率 $\pi$ とならぶ 超越数 $e$ について
2　基礎的な概念　色々な関数～p.20
3　基礎的な概念　演習　算術幾何平均～p.33
　算術幾何平均について，関数 $\dfrac{\sin x}{x}$ について
　内接・外接正多角形による円周率の近似値について
4　微分法　Taylor 級数　e の近似～p.70
　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ について
　オイラーの公式と $e$ の近似について
5　微分法　伸開と縮閉～p.84
　伸開線と縮閉線について，サイクロイド・アステロイドについて
6　微分法　演習　Newton 法　積分法　グレゴリーの公式～p.90
　ニュートン法について，$\pi$ の近似の色々
1st-2
7　積分法　置換積分　部分積分　ガンマ関数～p.115
　ガンマ関数・ベータ関数について，部分積分の公式について
8　積分法　Wallis の公式　Simpson の公式～p.128
　ウォリスの公式について
9　積分法　不定積分の計算～p.125
　高校生が積分できる関数について
10　積分法　長さの求まる曲線～p.136
11　積分法　練習問題～p.142
　三角関数の積分について
2nd
12　無限級数　一様収束　バーゼル級数～p.150
　オイラーの定数について，バーゼル級数について
13　無限級数　一様収束　巾級数　交代級数～p.189
　面白い交代級数について
14　無限級数　一様収束　指数関数および三角関数～p.194
　テイラー展開とオイラーの公式について
15　無限級数　一様収束　双曲線関数と懸垂線～p.200
17　関数空間　　p.119
　積分で良く出る問題について，シュワルツの不等式について
18　Fourier 級数　p.268～p.282
　フーリエ級数について，グレゴリーの公式・バーゼル級数再登場
○ 付録　近世数学史談
　目次のページは解析概論の数字です。

# 解析概論　再読７　はじめてのガンマ関数とベータ関数

**積分法**

高校の教科書のように「積分で表される関数」なんていわないで，

$F(x)=\int_a^x f(x)dx$　　$F(x)$：**積分関数**，$f(x)$:被積分関数でいいですよね。

で，連続関数の原始関数は必ず存在するか？といって，**「そもそも面積，体積とは何を意味するか？」**となるわけだ。　**「連続関数以外では，微分積分法はむずかしい！」**と高木さんでさえ言っておられるので，最初から余り近づかないことにしよう。

$\beta$ 関数，$\gamma$ 関数もまた面白いことが出てきたところで。ところで $\alpha$ 関数ってあるのかな。と思ってネットで調べても分からなかった。

さて，**置換積分**となるが，数研の「数 III」問題集にある次の問題はなんと「解析概論」にある。「変数変換の例としてしばしば引用される」とある。

$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$ これは　$x=\pi-t$ の置換で求まる。$\sin(\pi-x)=\sin x$ 利用。

他にも $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx=-\frac{3}{2}\log 2+\log\pi$　は $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx$

を使ったり，三角関数の周期公式に関するものが並んでいる。

高校の問題集レベル　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$　は $x=\frac{\pi}{2}-t$ の置換で求まる。

**部分積分**では，最近「大学への数学」でも出だした　$f(x)$ が多項式のとき

$\int e^{-x}f(x)dx=-e^{-x}\{f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)\}$ なんてのもあるが，高校生はここまで暗記しなくてもと思う。

$I_1=\int e^{px}\cos qxdx, I_2=\int e^{px}\sin qxdx$ も複素変数を用いて簡単に計算されると紹介している。

$I_1+iI_2=\int e^{(p+iq)x}dx=\frac{e^{(p+iq)x}}{p+iq}$ を実数化して実部と虚部に分ける。

指数関数，三角関数，$x$ の多項式の積分は**「計算の実行は面倒であるが，不定積分ができることの認識が大切である。」**

ここまできて，階乗関数を拡張して**ガンマ関数**が出る。

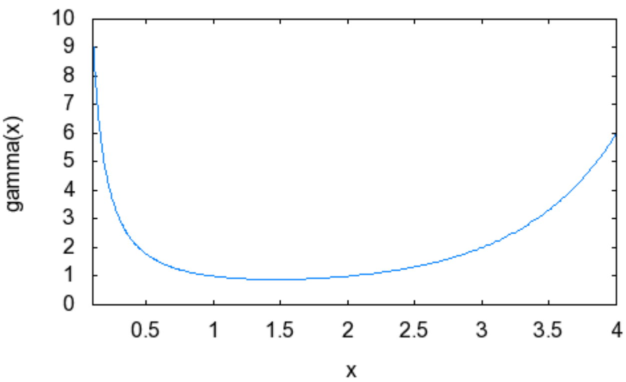
$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$　　$(s>0)$

$\Gamma(s)=-\left[e^{-x}x^{s-1}\right]_0^\infty+(s-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{s-2}dx=(s-1)\Gamma(s-1), \Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1$

よって $n$ が自然数のとき　$\Gamma(n)=(n-1)!$

自然数でないときは例えば　$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$　つまり　$0<x<1$ での値がわかればいい。

実際の計算はまた後で。最近やり始めた Maxima （フリーですよ）でグラフをかくと



入試では例えばこんな感じで，$e$ の評価に使われる。

**’14 信大理学後期**

$e$ を自然対数の底とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 自然数 $n$ に対し　$0 \leqq \displaystyle\int_0^1 t^n e^{1-t} dt < e - 1$ を示せ。

(2) 正の数 $a$ と自然数 $n$ に対し，次が成りつ立つことを示せ。

$$e^a = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^a t^n e^{a-1} dt$$

(3) (1) と (2) を用いて $2.4 < e < 3$ を証明せよ。

**解)**

(1) $0 \leqq t \leqq 1$ で $0 \leqq t^n \leqq 1$ (恒等的に 1 ではない) なので

$$0 \leqq \int_0^1 t^n e^{1-t} dt < \int_0^1 e^{1-t} dt = \Big[ -e^{1-t} \Big]_0^1 = e - 1$$

(2) 示すべき式を① とおいて

(i) $n = 1$ のとき，下のように成立。

① の右辺 $1 + a + \displaystyle\int_0^a te^{a-t} dt = 1 + a + \Big[ -te^{a-t} \Big]_0^a + \int_0^a e^{a-t} dt = 1 + a - a - \Big[ e^{a-t} \Big]_0^a = e^a$

(ii) $n = l$ の成立を仮定して，$n = l + 1$ のときは

$$1 + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{a^k}{k!} + \frac{1}{(l+1)!}\int_0^a t^{l+1} e^{a-t} dt = 1 + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{a^k}{k!} + \frac{1}{(l+1)!}\left\{ \Big[ -t^{l+1} e^{a-t} \Big]_0^a + (l+1)\int_0^a t^l e^{a-t} dt \right\}$$

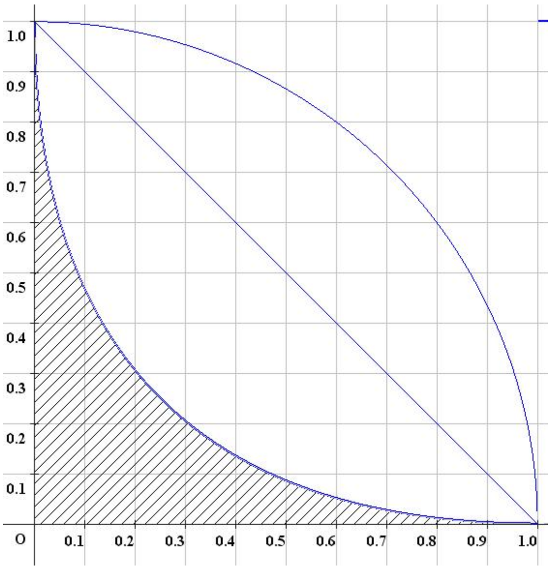
$$= 1 + \sum_{k=1}^{l+1} \frac{a^k}{k!} - \frac{t^{l+1}}{(l+1)!} + \frac{1}{l!}\int_0^a t^l e^{a-t} dt = 1 + \sum_{k=1}^{l} \frac{a^k}{k!} + \frac{1}{l!}\int_0^a t^l e^{a-t} dt = e^a$$

(3) $a = 1$ として $n = 2$ と $n = 3$ で評価すると出る。

Taylor 展開のときと同様に 9 回もやれば 2.71828 くらい行く。

**曲線 $x^n + y^n = 1\ (n > 0)$ とベータ関数**

まず，形は $n < 1$ ならアステロイド型（$n = \dfrac{2}{3}$ のときアステロイド），$n = 1$ なら正方形，$n = 2$ なら円，の一部。




図の斜線の部分の面積，$x$ 軸の周りに回転したときの体積が '08 年慶応理工の入試に出ましたね。

で，まず面積からいきますか。

$\displaystyle\int_0^1 (1 - x^n)^{\frac{1}{n}} dx \cdots$ ① を求めればよい。

$n = 1$ なら $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)dx = \frac{1}{2}$，　$n = 2$ なら $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

$n = \dfrac{1}{2}$ なら $\displaystyle\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x)dx = \left[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

$n$ が 1 より小さい（単位分数）と二項係数が関係しそうで，まあ計算はできそう。 $n$ が 1 より大きいと難しそう。

ちょっと，Maxima で実験してみると，

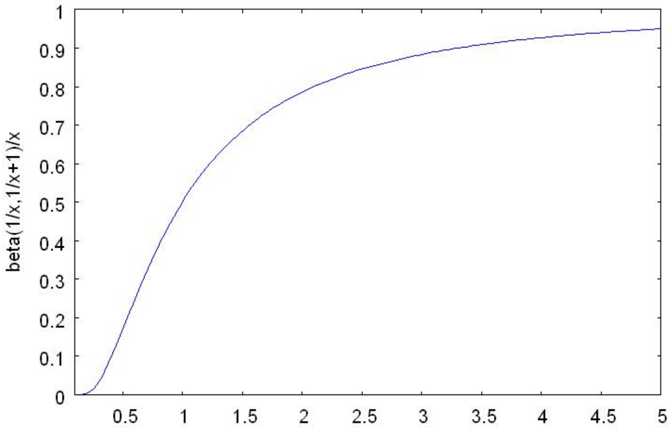
```
for n:1 thru 4 do display(integrate((1-x^(1/n))^n,x,0,1))
for n:1 thru 4 do display(integrate((1-x^n)^(1/n),x,0,1))
```

1 より小さいほうは，案の定 $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{1}{20}$　$\frac{1}{70}$，1 より大きいほうは，やっぱり $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\beta\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)}{3}, \frac{\beta\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)}{4}$

ベータ関数が出てくる。大体が $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^n)^{\frac{1}{n}} dx$ とやると，$\dfrac{\beta\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} + 1\right)}{n}$ とくるから，ベータ関数がその本質なのだ。**ベータ関数**とは**第一種オイラー積分**ともいわれる次の式で定義されるもの。

$\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} dt$

計算はあとからやるとして，これを利用して，上の斜線の部分の面積と $n$ との関係を目で見よう。




$\dfrac{\beta\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x} + 1\right)}{x}$

のグラフ。0 で 1 ,1 で 0.5 ,2 で $\pi/4$

大きくなると 1 に近づいているわけだ。

①を置換積分しよう。

$x^n=t$ とおくと $nx^{n-1}\dfrac{dx}{dt}=1$ より①$=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}dt=\dfrac{1}{n}\beta\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}+1\right)$ となる。

オイラーはこの積分をどんなときに何のために定義したのだろう？

それはさておき，$x,y$ 整数のときは

$\beta(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\dfrac{y-1}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^y-2dt=\dfrac{y-1}{x}\beta(x+1,y-1)$

$=\dfrac{y-1}{x}\cdots\dfrac{1}{x+y-2}\beta(x+y-1,1)$ ところで，$\beta(x,1)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}dt=\dfrac{1}{x}$ より

$\beta(x,y)=\dfrac{(y-1)!}{x\cdots(x+y-1)}=\dfrac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$

さあ $n=1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots$ はこいつを用いて

$1\cdot\beta(1,2)=\dfrac{0!1!}{2!}=\dfrac{1}{2},2\cdot\beta(2,3)=\dfrac{1!2!}{4!}=\dfrac{1}{6},3\cdot\beta(3,4)=\dfrac{2!3!}{6!}=\dfrac{1}{20},\cdots$

**数 II の「6 分の公式」数 III の部分積分の練習公式**すべてこれでいける。

$\displaystyle\int_a^b(x-a)(x-b)dx$ は $t=\dfrac{x-a}{b-a}$ と変数変換をすると，

$-(b-a)^3\displaystyle\int_0^1 t(1-t)dt=-(b-a)^3\beta(2,2)=-\dfrac{1}{6}(b-a)^3$

例えば $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^4dx=\beta(2,5)=\dfrac{1!4!}{6!}=\dfrac{1}{30}$

$\displaystyle\int_a^b(x-a)^2(x-b)dx=-(b-a)^4\beta(3,2)=-(b-a)^4\dfrac{2!1!}{4!}=-\dfrac{1}{12}(b-a)^4$

　では，整数でないときはというと，置換積分のやり方は一つに限らないので，

$x^n=\sin^2\theta$ とおくと $dx=\dfrac{2}{n}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos\theta d\theta$ より ①$=\dfrac{2}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos^{\frac{2}{n}+1}\theta d\theta$ となる。

ベータ関数の公式 $\beta(x,y)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta$ の証明も同じようにできる。

例えば，円 $x^2+y^2=1$ では　$\dfrac{1}{2}\beta\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\dfrac{\pi}{4}$

アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ では　$\dfrac{3}{2}\beta\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^4\theta d\theta=$(頑張って積分して)$=\dfrac{3}{32}\pi$

両方とも 高校の教科書にある $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$ の公式を使ってもいい。

これらを高校生流にやるのは，$x^2+y^2=1$ は $x=\cos\theta,y=\sin\theta$ と，

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ は $x=\cos^3\theta,y=\sin^3\theta$ と媒介変数表示してやる。

実は $\beta$ 関数の計算はもっと楽にできる。

$\beta(x,y)=\dfrac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$　は $x,y$ が整数でなくとも成立し，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ なることが知られている。

$\beta\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}=\dfrac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}=\dfrac{\pi}{2}$

$\beta\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}=\dfrac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!}=\dfrac{\pi}{16}$

暗算だ。

すると逆に**三角関数の積分**もこれでいける。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$n=2m$ のときは $\dfrac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} = \dfrac{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2}-1)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{m!} = \dfrac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1\cdot\pi}{2m(2m-2)\cdots 1}$

$= \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

奇数のときも同様に，次が示される。

$n$ が偶数のとき $\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

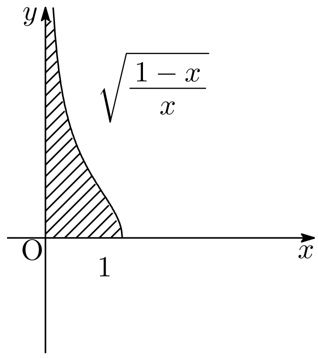
$n$ が奇数のとき $\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1$

これは部分積分の問題として高校の教科書にもある。

というわけで，① から色々なことが楽しめる。さらに $n=2$ のときは特別に値がわかるのだが

$\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\beta(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}}dt$ こんな積分が求められるということだ。




$\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$ の逆関数は $\dfrac{1}{t^2+1}$ だから $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ と同じだ。

これは $x=\tan\theta$ と置いて $\Big[\arctan x\Big]_0^\infty = \dfrac{\pi}{2}$ とやれば高校生でもできる。

ついでに体積の問題もかたづけると

$\pi\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)^{\frac{2}{n}}dx$ を求めればよいので，$\dfrac{\pi}{n}\beta\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}+1\right)$

$n=2$ 円のときは $\quad \dfrac{\pi}{2}\beta\left(\dfrac{1}{2}, 2\right) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)1!}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}\pi$

$n=\dfrac{2}{3}$ アステロイデのときは $\quad \dfrac{3}{2}\pi\beta\left(\dfrac{3}{2}, 4\right) = \dfrac{3}{2}\pi\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \dfrac{3}{2}\pi\dfrac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)3!}{\frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{16}{105}\pi$

ああ，面白かった。

ガンマ関数の性質はいつか証明しようかな。

次の章のために入試問題一つ。**2010 年大阪教育大**

自然数 $n$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $I_1$，$I_2$，$I_3$ を求めよ。(2) 不等式 $I_n \geqq I_{n+1}$ を証明せよ。

(3) 漸化式 $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$ が成り立つことを証明せよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ を求めよ。

解) (1) $I_1 = 1, I_2 = \dfrac{\pi}{4}, I_3 = \dfrac{2}{3}$ (2) $0 \leqq \sin x \leqq 1$ より (3) 部分積分 (教科書にあります)

(4) 大きさ評価で挟み撃ちに持ち込むのだから (2) より $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n}} \leqq 1$ で半分出来た。

あと半分は (3) を使うはずで $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}}{I_{2n}} \geqq \dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{I_{2n}}{I_{2n}} = \dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{2}{2+\frac{1}{n}} \to 1(n\to\infty)$

# 解析概論　再読８

**Wallis の公式**

高校の教科書にもある　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} S_{2m} = \dfrac{2m-1}{2m}\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & \cdots \quad n=2m \\[2ex] S_{2m+1} = \dfrac{2m}{2m+1}\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdots\dfrac{2}{3} & \cdots \quad n=2m+1 \end{cases}$

上式を下式で割って　$\dfrac{S_{2m}}{S_{2m+1}} = \dfrac{2m-1}{2m}\dfrac{2m+1}{2m}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\dfrac{\pi}{2}$

左辺の極限が 1 になることをいって　(前ページ大阪教育大の問題はこれ)

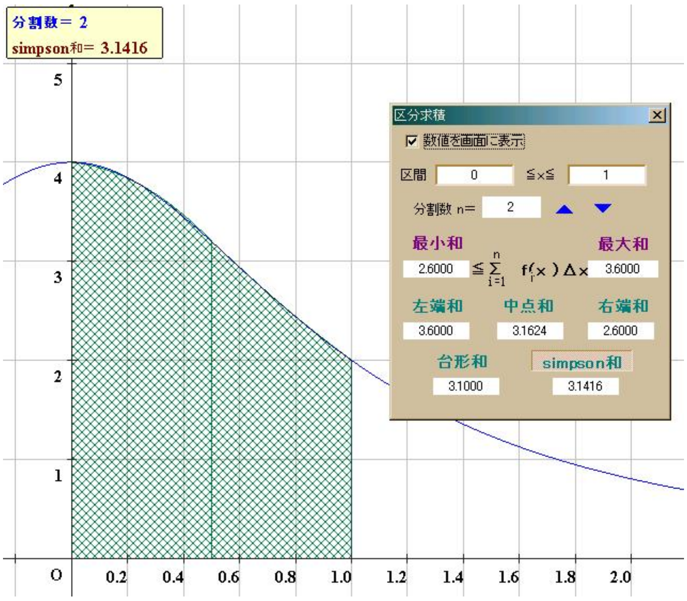
$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots$$

これは単調増加で収束は遅い,5 項で 3 になって,500 回弱で 3.14

ついでに，円周率の近似値として積分表示さえできれば積分の近似計算をして

$\pi = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の右辺を近似する。

ファンクション・ビューというソフトでこれを近似計算した結果




このソフトでは **Simpson の公式**は，要するに２分割で２次曲線で近似するシンプソンの公式を使っているということなのだろう。正しく２分割すると 3.13$\cdots$ どっちにしろいい近似だ。

$\pi$ の近似はあとモンテカルロ法くらいかな。

**積分法　高校生はどこまでやるのだ？その２**　$\sqrt{ax^2+bx+c}$

高校生ができる分をヒント付きで出すもんだから，積分はいつも できる と思うか，このヒントは一体何かとかどうも不安になってしまうのではないだろうか？

前にあげた三角関数を有理関数に変えるのも

高校生流 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(\cos x)'}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx = -\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C$

ヒント $t = \tan\dfrac{x}{2}$ 付 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$　(こっちのが楽)

もちろん　$\displaystyle -\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = -\frac{1}{2}\log\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \log\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|$ だから上と下は同じ。

事実として，$F$ を有理関数として $F(\cos x, \sin x)$ は積分可能として，最後に $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ の積分となる。$\sqrt{\ }$ の中が平方因子を有しない３次または４次の多項式が楕円積分，つまりその積分は初等関数でない（積分できない）。

# 解析概論　再読９

## 積分法　高校生はどこまで　その２

| | | |
|---|---|---|
| $x^{\alpha}$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\log\lvert x\rvert$ | |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ | $x=\tan\theta$ |
| $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $\dfrac{1}{2}\log\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$ | |
| $\dfrac{1}{x^2-1}$ | $\dfrac{1}{2}\log\left\lvert\dfrac{1-x}{1+x}\right\rvert$ | |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ | $x=\sin\theta$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\cosh^{-1}x$ | $x+\sqrt{x^2-1}=t$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\sinh^{-1}x$ | $x+\sqrt{x^2+1}=t$ |
| $\sqrt{x^2-1}$ | $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\cosh^{-1}x)$ | |
| $\sqrt{x^2+1}$ | $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}+\sinh^{-1}x)$ | 放物線の長さ |
| $\sqrt{1-x^2}$ | $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$ | |

解析概論の表です。7,8 行目は

$y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とすると

$e^x=y+\sqrt{y^2-1}$ だから

$x=\log\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|$ つまり

$\cosh^{-1}x=\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

$y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とすると

$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$ だから

$x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$ つまり

$\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

これを微分するというのが理解しやすい。

ちなみに $\cosh^2-\sinh^2=1$（双曲線関数）

２重線より下は部分積分をすることによって上が使える。

ところで，7,8 行目の置き換えはヒントが付いて入試問題でも見たことがある。

この理由が「概論」にある。

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ については，平方完成して変数変換すれば $\sqrt{ax^2+c}$ を考えればよく，その代表として上表の 6,7,8 行目が残る。

この置き換えについて，高校生流は

$\sqrt{x^2+1}$　なら $x=\tan\theta$,$\sqrt{x^2-1}$　なら $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$,$\sqrt{1-x^2}$　なら $x=\sin\theta$ と天下りで覚えろとくる。

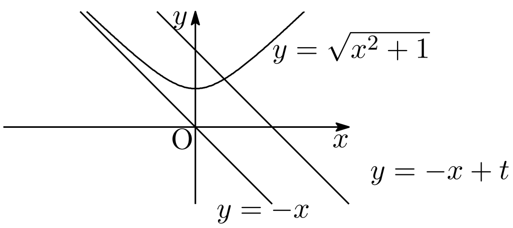
もちろんその理由は，三角関数と双曲線関数の逆関数までやると分かる。

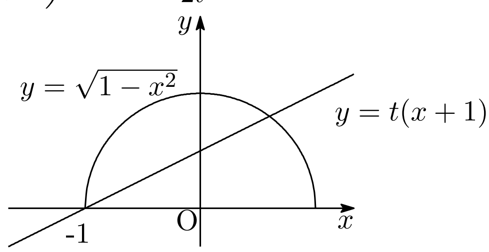
「三角関数を経由しない」方法は根号と $dx$ が有理式となればよい，その変数変換は

$\sqrt{x^2+1}$　なら $t=x+\sqrt{x^2+1}$,$\sqrt{x^2-1}$　なら $t=x+\sqrt{x^2-1}$,$\sqrt{1-x^2}$　なら $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$

以下この理由。

$y=\sqrt{x^2+1}$　より　$x^2-y^2=-1(y>0)$ この曲線（双曲線）と $y=-x+t(t>0)$ の交点が $t$ の有理式で表される。計算すれば $(x,y)=\left(\dfrac{t^2-1}{2t},\dfrac{t^2+1}{2t}\right),dx=\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$　$y=\sqrt{x^2-1}$ も同様。




$y=\sqrt{1-x^2}$　より　$x^2+y^2=1(y>0)$ この曲線（円）と $y=t(x+1)(t>0)$ の交点が $t$ の有理式で表される。計算すれば $(x,y)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right),dx=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}dt$

逆双曲線関数に関係したものは双曲線が出てきて，逆三角関数は円が出てくるとは！あたりまえといえば当たり前だが。大体数学は当たり前と思えることが次の飛躍へのステップのような気がする。数Ｃの「**媒介変数表示される曲線**」もこれと結びつけるとやる理由が実によく分かる。

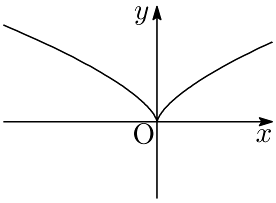
$\sqrt{\ }$ の中身が平方の因子なく３次４次なら**楕円積分**となる。さすがに高校のレベルを超えるな。

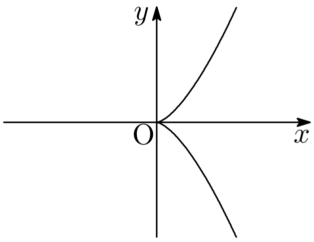
# 解析概論　再読10

**積分法　長さが計算できる曲線「二次曲線の弧長は円と放物線とのほかは楕円積分に帰する。」**

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ が積分できる関数という意味で。（放物線は $\sqrt{1+x^2}$ に帰着）

① $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \end{cases}$ $,y=x^{\frac{2}{3}}, y^3=x^2$　　　$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ $,y=x^{\frac{3}{2}}, y^2=x^3$

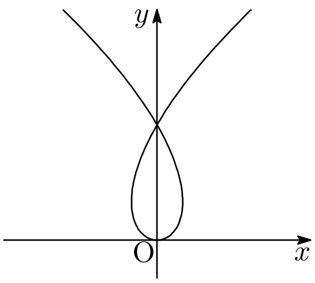


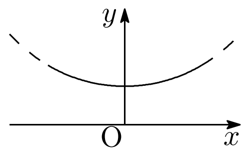




② $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$ を使うもの　**懸垂線**もその一つ

$\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3-t \\ y=t^2 \end{cases}$

懸垂線　$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$ なら　$e-\dfrac{1}{e} \fallingdotseq 2.35$



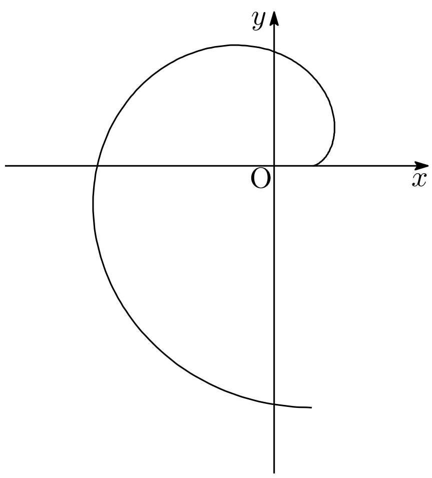

③　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　を使うもの　**円，アステロイド，サイクロイド，伸開線**

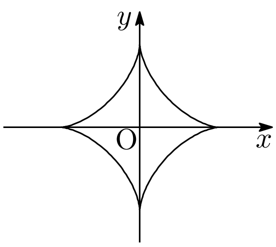
$P(\cos\theta, \sin\theta)$　$x^2+y^2=1$ の円周は $2\pi$

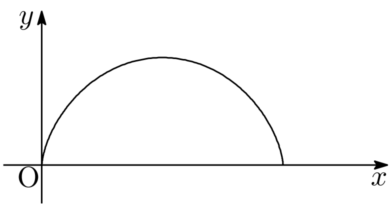
$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ ならアステロイド周長 6　$P(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$

サイクロイド　$P(\theta-\sin\theta, 1-\cos\theta)$　は 4

円の伸開線（involute）$P(\cos\theta+\theta\sin\theta, \sin\theta-\theta\cos\theta)$　は $2\pi^2$ 図右



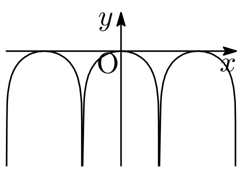




$P(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta)$ は　$\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{f(t)\}^2}$ が積分できるもの。

④　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

例えば $y=\log(|\cos x|)$



# 解析概論　再読11

**積分法　練習問題**

三角関数が虚数の指数関数だというのは次の話題ですが, 計算するには便利なのでここでやる。

(2) 高校生流と複素数流　**三角関数の次数を下げる公式**（積分には必要）

奇数乗なら割りと簡単で

$\displaystyle\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 (\sin x)'\,dx = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)(\sin x)'\,dx$

$= \sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x + C$

$\cos^4 x = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \cdots$　とやるところを

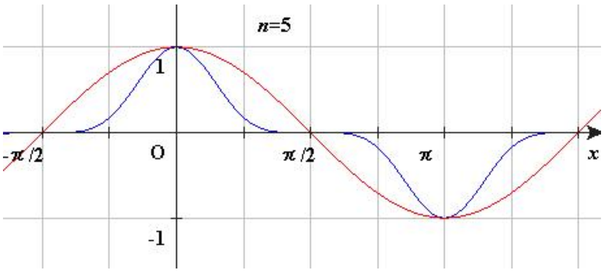
$e^{xi} = \cos x + i \sin x$ より $\cos x = \dfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$ なので

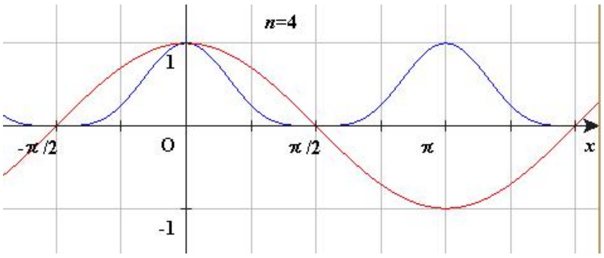
$\cos^5 x = \left(\dfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{2^5}\left(e^{5xi} + e^{-5xi} + {}_5\mathrm{C}_1\, e^{4xi}\cdot e^{-xi} + {}_5\mathrm{C}_4\, e^{xi}\cdot e^{-4xi} + {}_5\mathrm{C}_3\, e^{3xi}\cdot e^{-2xi} + {}_5\mathrm{C}_2\, e^{2xi}\cdot e^{-3xi}\right)$

$= \dfrac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$

$\cos^4 x = \left(\dfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4}\left(e^{4xi} + e^{-4xi} + {}_4\mathrm{C}_1\, e^{3xi}\cdot e^{-xi} + {}_4\mathrm{C}_3\, e^{xi}\cdot e^{-3xi} + {}_4\mathrm{C}_2\, e^{2xi}\cdot e^{-2xi}\right)$

$= \dfrac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8}$






逆に $\cos nx$ を $\cos x$ の巾にするには $n$ **倍角の公式**

ド・モアブルの定理か, 回転行列を使うのかな。

$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ より Re を実数部分とすると

$\cos 4x = Re[(\cos x + i\sin x)^4] = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x = 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1$

$\cos 5x = Re[(\cos x + i\sin x)^5] = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x = 16\ \cos^5 x - 20\ \cos^3 x + 5\ \cos x$

どちらも二項定理が活躍する。高校では複素数平面が弱くなったので, 今の高校生はド・モアブルの公式さえ教科書の本文にない。数学 C で回転をやらないと $\cos nx$ なんて見ないわけだ。

Maxima というソフトでは次のように入力する。

$for\quad i:1\quad thru\quad 5\quad do(display(trigsimp(realpart((cos(x)+\%i*sin(x))^i))))$

もちろん, もっと簡単に

$for\quad i:1\quad thru\quad 5\quad do(display(trigsimp(trigexpand(cos(i*x)))))$

上の巾を $\cos nx$ にするには

$for\quad i:1\quad thru\quad 5\quad do(display(trigsimp(trigreduce((cos(x))^i))))$

こんなことができるソフトがフリーなんて本当に結構なことだ。

同じ三角関数でこんな計算もという意味で

(3) $\displaystyle\int \sin^{n-1} x\ \cos(\alpha+1)x\,dx = \frac{1}{\alpha}\sin^{\alpha}\cos\alpha x$

例えば　$\displaystyle\int \sin x \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x \cos 2x$ どうやって示そうと思うが右辺を微分すれば左辺になる。