「解析概論・再読」

高校生に。問題を解いていて，何故こういう問題があるのだろうとか思ったことはありませんか。これは，教科書＋αの内容で，さらに数学の興味を深めて欲しい，という願いから計画したものです。「解析概論」は無くてもいいですし，大学入試問題からも問題を選んであるので入試対策にもなりますよ。
数学が趣味の人に。解析概論はとてもいい本で，読み直すと興味は尽きません。高校の数学が好きだった人のために，もう少し進むととても面白いことがわかります。
もちろん私のためにも。Maxima とか Function View とか，コンピュータは思考の道具です。伝達の道具でもあります。楽しめました。

ファイルが大きいので3部に分けた。

　目次のページは解析概論の数字です。

解析概論　再読　1

１章　基礎的な概念

「我々が十進法によって数を表すに至ったのは, 手指の数にその原因があるのであろうが, 理論上は１以外の任意の自然数を基本として, 十進法と同様の方法によって, 数を表すことができる。」

有理数は有限小数か, 循環小数かになる。有限小数も循環小数になる（数の表記は一意ではないということだ）のですべて循環小数で書けるといってもいい。

進法によって数の表記が有限になったり無限になったりするのも, ちょっとびっくりものだ。

$\dfrac{1}{3} = 0.\dot{3}$(十進法で) $= 0.1$(三進法で)

ところで,**10 進数を 2 進数に直す方法**を次のようにしたらどうだろうか？

	1	2	.	3	0
0		6		6	1
0		3		2	0
1		1		4	0
				8	1
				6	1

たとえば 12.3 を 2 進数に直すのは。

整数部分は 2 で割って割り切れたときには 0, 余りが出たときには 1 を左に書いていく（のは今まで通り）。

小数部分は 2 倍して 2 桁になったら 1, そうでなければ 0 を右に書いていく。

結果は　$1100.0\dot{1}00\dot{1}$

n 次元の立方体を定義してから, **「我々は言語の短縮を欲するために, 上記のような幾何学的の表現法を用いるのであるから, 文字に拘泥して, n 次元空間に関して奇怪な空想をほしいままにする必要はない。」**と面白い注意をしている。

いよいよ, 有名な例の登場だ。高校生にも関係ありそうなのは,2 項定理の応用の

例１　$a > 1, k > 0$ ならば $n \to \infty$ のとき $\dfrac{a^n}{n^k} \to \infty$

例５　e の定義　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

有界な単調増加数列は収束するを使って

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 1 + \dfrac{n}{1!}\dfrac{1}{n} + \dfrac{n(n-1)}{2!}\dfrac{1}{n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^n}$

$< 1 + \dfrac{1}{1!}\dfrac{n}{n} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{n(n-1)}{n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\dfrac{n(n-1)\cdots 1}{n^n}$

$< 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

$< 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} < 3$

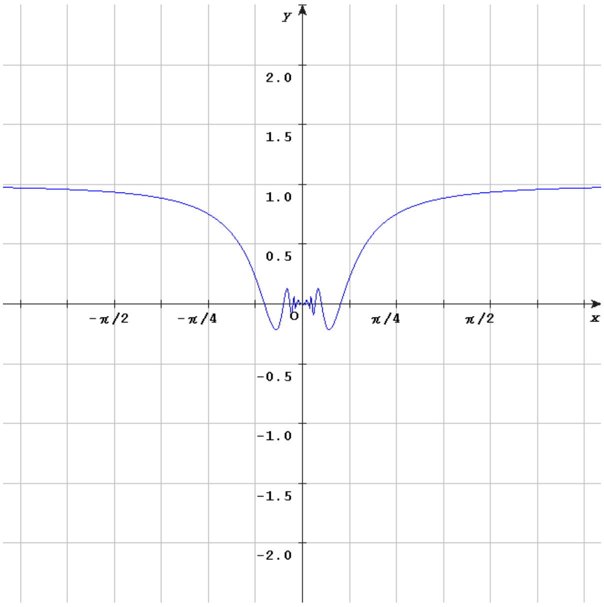
何故ならば,　$n! > \underbrace{n(n-1)\cdots 2}_{n-1\text{ 個}} > \underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n-1\text{ 個}} = 2^{n-1}$　($n \geqq 2$ のとき)

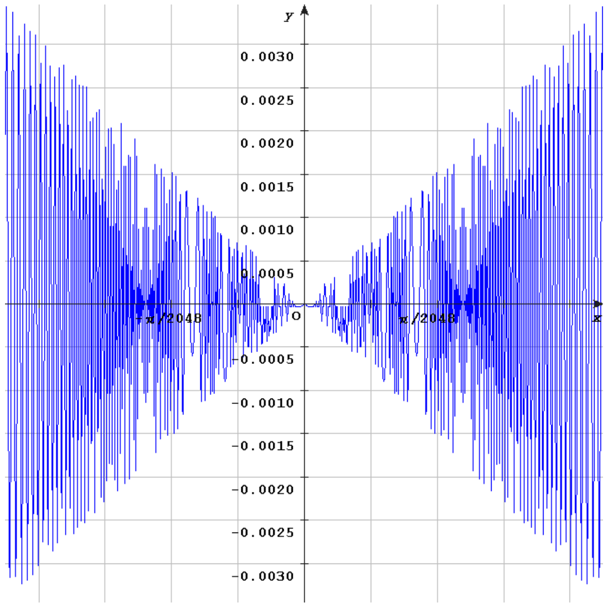
解析概論　再読　２

１章　基礎的な概念

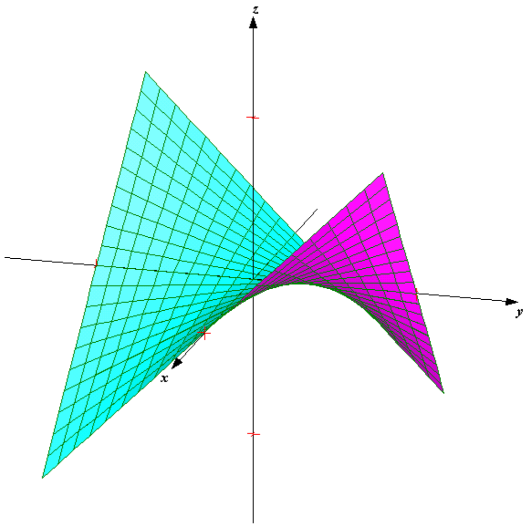
$y = x\sin\dfrac{1}{x}$ もなるほど思うけど, 実際にグラフを見てみると

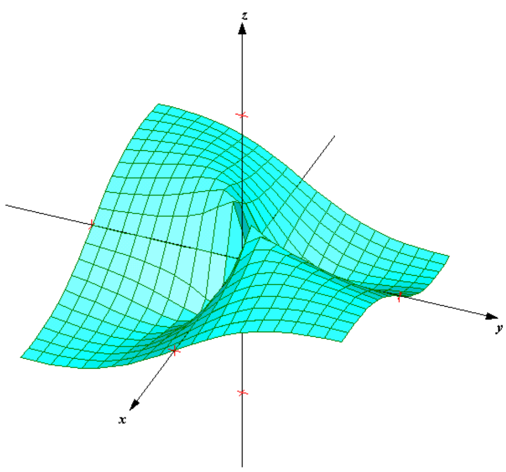
左は遠くから見た図, 右は近くから見た図。





$z = xy, z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$　　も目で見ると面白いです。





等高線も左は明らかでしょう。右は原点を通る直線となる。

$\dfrac{2xy}{x^2+y^2} = k$　 とおくと　 $y = \dfrac{1\pm\sqrt{1-k^2}}{k}x$

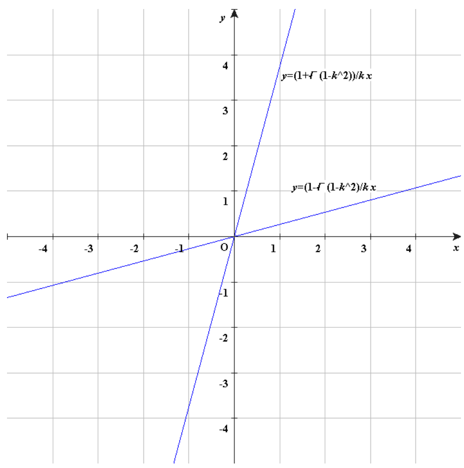
x 軸となす角を θ とおくと $\dfrac{1+\sqrt{1-k^2}}{k} = \tan\theta$

これから $k = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$

だから　 $k = \sin 2\theta$ とおくと，傾き $\dfrac{1\pm\sqrt{1-k^2}}{k}$

$= \dfrac{1\pm\cos\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta, \dfrac{1}{\tan\theta}$

となり　 x 軸となす角 θ　 と $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ の２直線となる。



解析概論　再読　3

練習問題がまたいいんだ，ほとんど解けないけど。私が持っている版はとても古いもので，最近の普及版には解答が付録でついているのだろうか？

(1)　相加平均（arithmetic mean）と相乗平均（geometric mean）をとりながらの極限，算術幾何平均（Arithmetic-geometric mean）。by Gauss

$a_1 > b_1 > 0, a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot b_{n-1}}$

いきなり極限を求めようとして挫折しましたが，答は楕円積分だそうで，簡単に出る分けない。有界単調数列で極限があるのは分かるので，あればとして $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n, \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より，$\alpha = \beta$

これを，表計算で実験してみると収束は速いですね。

a_n	100	75	72.85534	72.83955	72.83955
b_n	50	70.71068	72.82377	72.83955	72.83955

(2)　(1) の三角関数への変形

$b_1 = l, a_1 = l\cos x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_n \cdot b_{n-1}}$

計算していくと　$a_2 = l\dfrac{1+\cos x}{2} = l\cos^2\dfrac{x}{2}, b_2 = \sqrt{l^2\cos^2\dfrac{x}{2}} = l\cos\dfrac{x}{2},$

$$a_3 = \frac{l\cos^2\dfrac{x}{2} + l\cos\dfrac{x}{2}}{2} = l\cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}, b_3 = l\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}, \cdots$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{l\sin x}{x}$ となっていてビックリします。つまり $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{8}\cdots = \dfrac{\sin x}{x}$

両辺の級数展開（後で出てきますが）を考えると一致しますね。

$$\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{4}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{16}+\cdots\right)\cdots = 1-\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)+\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}x^2+\cdots = 1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}x^2+\cdots = \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right) = \frac{\sin x}{x}$$

そこまでしなくても，

$P_n = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{8}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ とおくと，

$$P_n\cdot\sin\frac{x}{2^n} = \cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n} = \cos\frac{x}{2}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2} = \cdots = \frac{\sin x}{2^n}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sin x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$

このアイデアは入試問題でも使われます。というか，ここからつくったのじゃあないか？

2008 東京医科歯科大 $0 < t < \pi$ のとき，

(1) $\left(\cos\dfrac{t}{2}\right)\left(\cos\dfrac{t}{4}\right)\left(\cos\dfrac{t}{8}\right) = \dfrac{\sin t}{8\sin\frac{t}{8}}$ を証明せよ。

(2) $a_1 = \cos\dfrac{t}{2}, a_n = a_{n-1}\left(\cos\dfrac{t}{2^n}\right) \quad (n = 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の

$\lim_{n\to\infty} a_n$ を t を用いて表せ。

(3) $b_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}, b_n = \sqrt{\dfrac{1+b_{n-1}}{2}} \quad (n = 2, 3, \cdots), c_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}, c_n = c_{n-1}b_n \quad (n = 2, 3, \cdots)$

で定義される $\{b_n\}, \{c_n\}$ で $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

(1) がアイデアそのもの。

(2) は，だから $\dfrac{\sin t}{t}$

(3) は，$b_n = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ で，$c_n = c_{n-1}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ (2) の t に $\dfrac{\pi}{2}$ を入れたもの。で，答 $\dfrac{2}{\pi}$

さらに，この応用として，直径 1 の円に内・外接する正 k 角形の周の長さを $p(k) = k\sin\dfrac{\pi}{k}, P(k) = k\tan\dfrac{\pi}{k}$ として　$a_1 = \dfrac{1}{P(k)}, b_1 = \dfrac{1}{p(k)}$ として上の漸化式に代入すると，確かに $a_n = \dfrac{1}{P(2^n\cdot k)}, b_n = \dfrac{1}{p(2^n\cdot k)}$ となり極限が $\dfrac{1}{k\sin\frac{\pi}{k}}\dfrac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} = \dfrac{1}{\pi}$，　$k = 4, 6$ で π の近似ができるとある。「収束は遅い」のでとあるので，実験すると次くらいに遅い。2003 年東大の問題は円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。で，内接 8 角形でいけるものだ。

n	0	1	2	3	4	5	6
$2^n * 4$	4	8	16	32	64	128	256
sin	2.828427125	3.061467	3.121445	3.136548	3.140331	3.141277	3.141514
tan	4	3.313708	3.182598	3.151725	3.144118	3.142224	3.14175
$2^n * 6$	6	12	24	48	96	192	384
sin	3	3.105829	3.132629	3.13935	3.141032	3.141452	3.141558
tan	3.464101615	3.21539	3.15966	3.146086	3.142715	3.141873	3.141663

北大'10 年はそのまま

正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して $a_0 = r\cos\theta,\quad b_0 = r$ とおく。

a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を漸化式 $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$ により定める。

以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3) $\theta \fallingdotseq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。

解析概論　再読　4

練習問題からもう一つ (7)

(a,∞) で連続で $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=l$ ならば $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l\,(Cauchy)$

漸近線のようなやつ，特に　$f(x)=\log x$ が挙げられている。

$\lim_{x\to\infty}(\log(x+1)-\log x)=\lim_{x\to\infty}\log(1-\dfrac{1}{x})=0$ より $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$。

つまり $\log x$ は大きくなるのが一次関数より遅い。逆に言えば，e^x はどんな巾（この漢字は冪の仮字で和算家の例に従ったと断っている）関数より大きくなるのが速い。

高校生用に　$t=\log x$ とおくと　$x=e^t$　で　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$（既述）

第２章　微分法

三角関数の逆関数の微分は積分法のときにしよう。ここでも　$\sin^2 x$ という記号が使われすぎてか，逆関数の記号を $\sin^{-1}x$ でなく $\arcsin x$，独仏流　arc，tan　は英米流にしたと断っている $\arctan x$。

指数関数の微分では,「$x=0$ における接線の傾きが 1 となるのが，対数に戻して e だ」という流れは授業でもそうしてます。

つまり，$\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=1$ となる a が e で，$a^x=x+1$ として $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

平均値の定理（フランス系では有限増加の公式ともいうとある）。偏微分もあるが高校生の話題を急ごう。

そして Talor 級数です。**「Taylor 級数は解析学において最も重要である。」**

私も「関数が級数展開できるとすれば」として，授業でもやっています。そしてオイラーの公式の証明までやります。「博士の愛した数式」ブームで生徒は結構喜びます。

e^x は $e^0=1$ そして，微分しても変わらないから $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}\cdots$

$\sin x,\cos x$ は $\sin 0=0,\cos 0=1$ そして，２回微分すると $-\sin x,-\cos x$ となるから，

$\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots,\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}-\cdots$

さあ，

$e^{xi}=1+\dfrac{xi}{1!}+\dfrac{(xi)^2}{2!}+\dfrac{(xi)^3}{3!}\cdots=1-\dfrac{x^2}{2!}-\cdots+i\left(\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\right)=\cos x+i\sin x$

ここで $x=\pi$ を入れてみろ。**オイラーの公式**だ。と高校の授業でやります。

$e^{\pi i}=-1$

ここでの話題は e の近似。

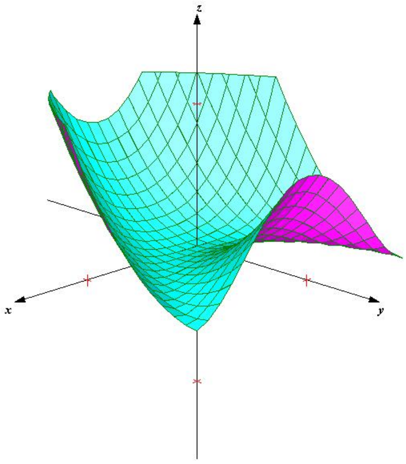
定義は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

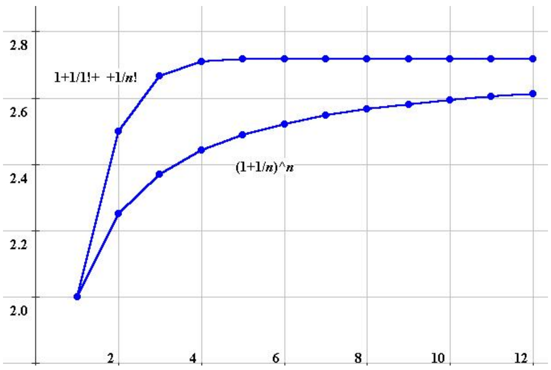
単調増加で 2.7 を最初に超えるのが 74 回。

級数展開したものが

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$$

これも単調増加で 2.7 を最初に超えるのが 4 回,10 回もやれば 2.7182818 までいく。最も重要かあ！。





多変数の極大極小，最大最小こそ想像するのが楽しいところだ。多変数のグラフを見てみたいもんだ。が，まずは高校生向きに 1 変数で先に進もう。

ひとつだけ，$z=(y-x^2)(y-2x^2)$ 原点で極小値をとらない。三次元でも停留（stationnary）というのかな。再再読とか言って次にやりたい。

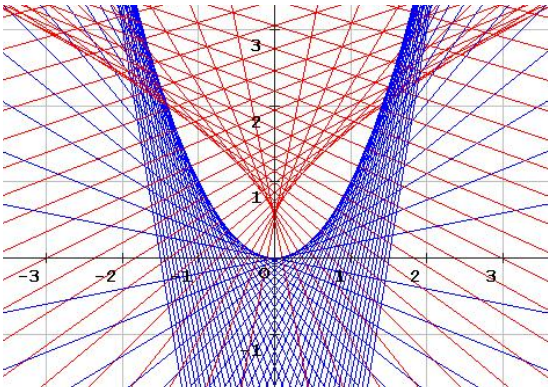
解析概論　再読５

伸開線（involute）と縮閉線（evolute）これも目で見ると面白いところだ。

接線の包絡線がその曲線で，ある曲線の法線の包絡線が縮閉線というわけだ。

例えば $y = x^2$ 上の $P(t, t^2)$ における接線の方程式は $y = 2t(x - t) + t^2$ より $y = 2tx - t^2$

これを，t で動かすと，$y = x^2$ が浮き出てくる，というわけだ。



青で見えるのが接線の包絡線，赤で見えるのが法線の包絡線。

包絡線は高校の範囲では存在領域という問題で登場する。

例えば赤の包絡線は，法線の方程式を t の 3 次方程式として見て，その実数解が 2 個ある条件として出る。（極値が 0）

$27x^2 = 2(2y - 1)^3$

コップに光が反射して壁に描かれたりするのは，この曲線に関係あるというのもどこかで読んだような気がする。

ここに出てくる例が高校にも出てくるし，長さが求まる曲線で多く登場する。

サイクロイド（Cycloid　円のようなもの）

図を描いて式を出して（半径 1 の円をずらさず転がすときの円周上の点の軌跡）

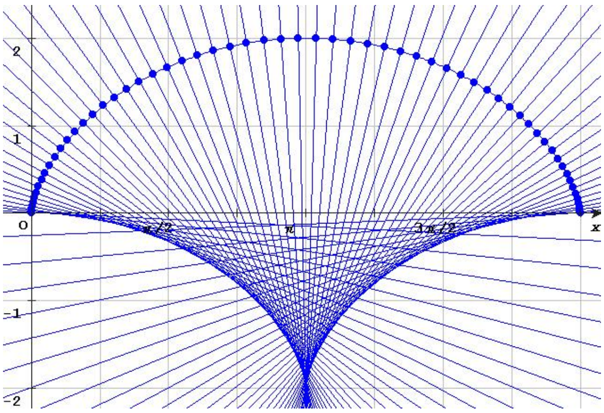
$x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$

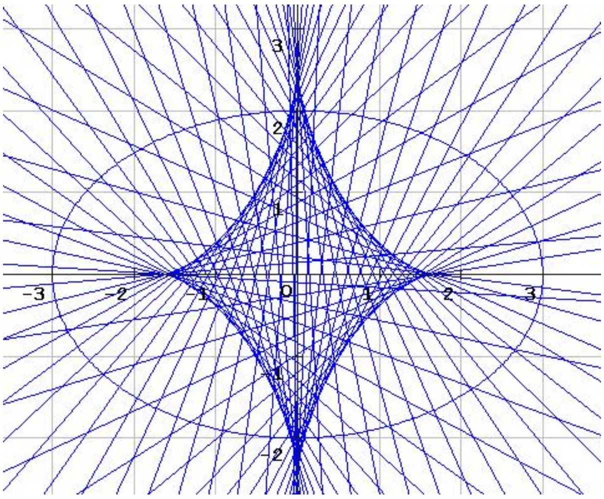
この縮閉線がまたサイクロイド。曲率半径を使う証明が出てます。

アステロイド（Asteroid　星のようなもの）

楕円の縮閉線として次の式を出しています。

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

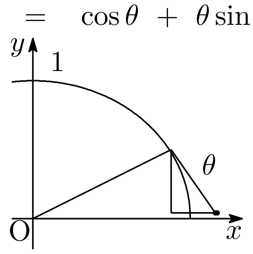


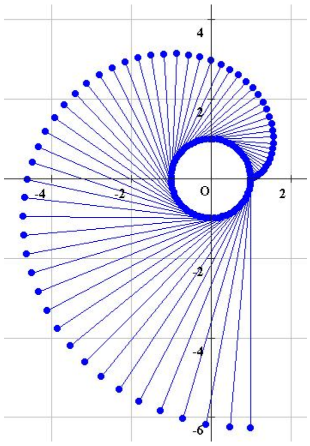


円の伸開線（インヴォリュート　これの名前がない）

図を描いて式を出して（半径 1 の円に巻きつけた糸をピンと張ってほどいていく）

$x = \cos\theta + \theta\sin\theta, y = \sin\theta - \theta\cos\theta$

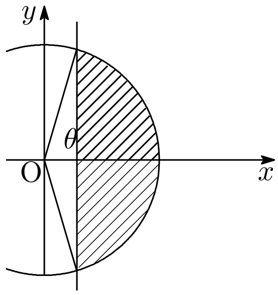




解析概論　再読６

微分の演習　Newton 法　グレゴリーの公式

昔は大学入試でも見たことはありますが，最近は解の個数くらいで近似は見なくなったかな。ところで，むかし某大学の推薦入試を受けてきた子が「円の面積を３等分する直線を引け」という問題が出て，解けなかったと泣いていたことがあった。問題を正しく覚えているなら，なかなの問題が出たものだ。この解をNewton 法で出すか。



扇形から三角形を引いて出しても，積分で $2\int_0^x \sqrt{1-x^2}dx = \dfrac{\pi}{3}$

から出してもいいが，方程式は $6\theta - 3\sin 2\theta - 2\pi = 0$ となるはずで，

左辺を $f(\theta)$ とおくと $f'(\theta) = 6(1-\cos 2\theta), f''(\theta) = 12\sin 2\theta$

なので $f(0) < 0, f(\dfrac{\pi}{2}) > 0, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(\theta) > 0$ で凸関数

曲線との交点の変わりに，b_n での接線との交点で近似しようというものだから

$f'(b_n)(b_{n+1} - b_n) + f(b_n) = 0$

$b_1 = \dfrac{\pi}{2}, b_{n+1} = b_n - \dfrac{f(b_n)}{f'(b_n)}$ で $b_2 = \dfrac{5}{12}\pi, b_3$ くらいは計算でも出せるが，プログラミングして走らせてみると，4 回以降は小数点第 14 位まで同じくらい収束が速い。

中心角をラジアンで言えば $\dfrac{5}{12}\pi \to 1.30\cdots$, x 座標で言えば $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \to 0.26\cdots$ でした。

「方程式は代数的に解けないので Newton 法で近似すると，**･･･** 」なんて答えたら合格かな。

積分法

どこまでやればいいんだ，高校生の積分は！教科書にない「概論」にある次の段階は

□三角関数の分数関数はすべてこれでできる，という。

$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とおけば　$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

□指数関数の逆関数として対数関数までやるのだから，三角関数の逆関数までやってしまえばいいのに。これで，分数関数がすべて積分できる，という。

$\sin x$ の逆関数 $\sin^{-1} x$ で　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$　のものを $\arcsin x(-1 \leqq x \leqq 1)$ とすると

$x = \sin y, \dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ なので

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\tan x$ の逆関数 $\tan^{-1} x$ で　$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$　のものを $\arctan x$ とすると

$x = \tan y, \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ なので

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

これだけでも面白い事実が理解できる。

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ なので，級数展開して

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

「神は奇数を好む」といわれる**グレゴリーの公式**。実は偶数の積分なので偶数を好んでいるのかなとも思われるが，その起源は $\dfrac{1}{1+x^2}$ なのだった。

これは収束が遅く，10 項までやっても 3 にならない。3.14 の 4 が出るのは 121 回だった。

この $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ の証明が 09 年度の北大入試に出た。いい問題だなあ。

北大 09 年 05

自然数 n に対して $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。(2) a_{n+1} を a_n で表せ。(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。

略解

(1) は教科書にもある。なるほど，思えばこいつが使えるのか。

$$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

(2) 教科書にもよくある部分積分から漸化式を出すもの。

$$a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\left[\frac{1}{2n+1}\tan^{2n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-a_n=\frac{1}{2n+1}-a_n$$

(3) ここらへんからじっくり考えて，極限で困ったら「はさみうち」そして (2) を使うと思えば

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で，$\tan^{2n}x\geqq 0$ なので $a_n\geqq 0$，$a_{n+1}\geqq 0$ よって $0\leqq a_n\leqq\dfrac{1}{2n+1}\to 0$ ($n\to\infty$)

(4) これは何だと思って少しかいてみると，グレゴリーの公式じゃないか！となって，答えは $\dfrac{\pi}{4}$

なんてやったら，部分点くれるかな？無理だな。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=1-(a_2+a_1)+(a_3+a_2)-\cdots+(-1)^{n+1}(a_n+a_{n-1})$$
$$=1-a_1+(-1)^{n+1}a_n=1-(1-\frac{\pi}{4})+(-1)^{n+1}a_n\to\frac{\pi}{4}$$

π の近似は昔からの図形による方法（**その１**）内接・外接多角形で円を近似するもの，これは大学入試でもよく出る（再読「概論」３回目に解説)。その応用として下のヴィエタの公式（というらしい)。

$\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{8}\cdots=\dfrac{\sin x}{x}$ を基にした $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots=\dfrac{2}{\pi}$

その２：ウォリスの公式に絡むもの（８回目に解説)。$\dfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\dfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots=\dfrac{\pi}{2}$

その３：今回のグレゴリーの公式に関係したもの。

ここまでは入試にも出たことになって，あと残るのはバーゼル級数（**その４**）（12 回目に解説）くらいだ。でもまさか，これは入試には無理だろうな。$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$

　と思っていたら、(大体同じようなことを考えてる人は多くて、某講演で教えられましたけど）入試に出てますねえ。2003 年日本女子、詳しくは 12 回で。

上の４つはどれも美しく単純で見事な公式だ。

交代級数（13 回に解説）も面白いといえばとても面白い。

自然数の逆数　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots=\infty$ だけど　$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\log 2$

奇数の逆数　$1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots=\infty$ だけど　$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots=\dfrac{\pi}{4}$

偶数の逆数　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\cdots=\infty$ だけど　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\cdots=\dfrac{1}{2}\log 2$

ちなみに，階乗の逆数 $1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots=e$ は入試には花盛り。

すべて，テーラー展開を漸化式で工夫したものと極論できるような‥