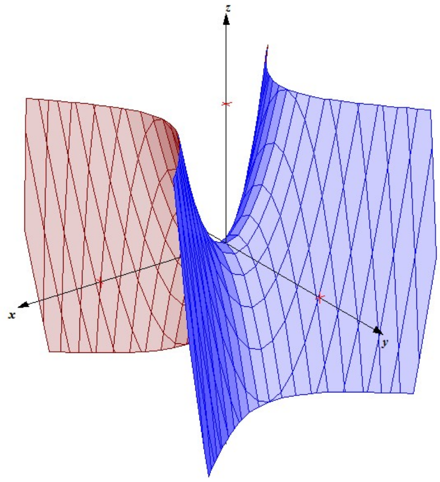
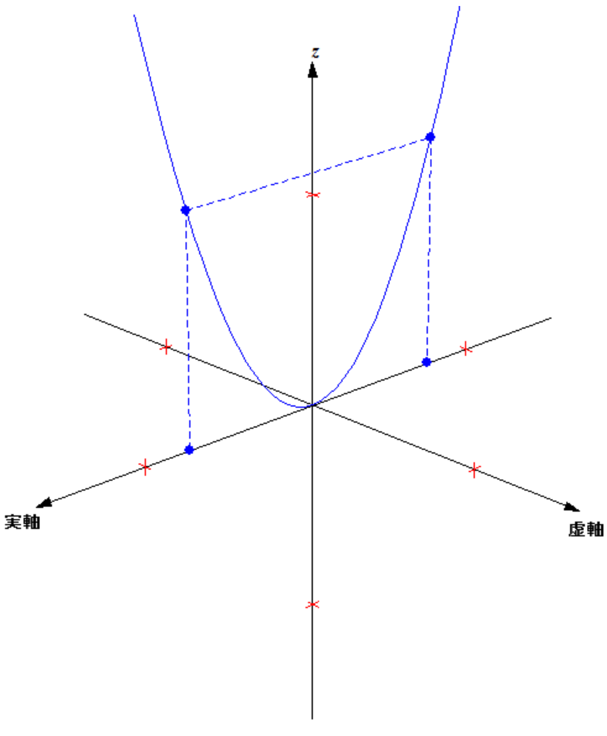
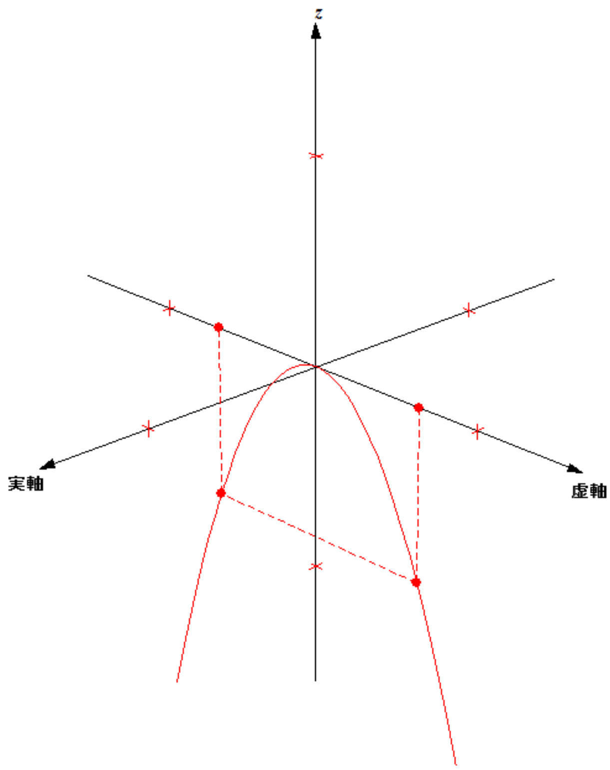
虚数解を目で見る



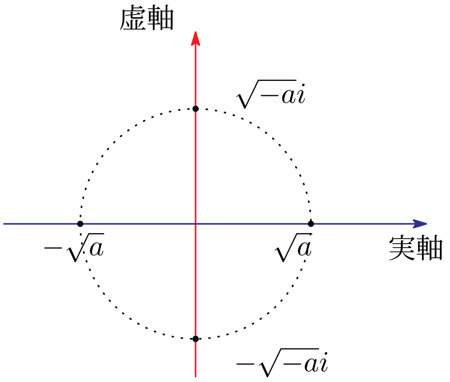
今回も生徒の質問からです。放物線と直線の位置関係は「交わる」か「接する」か「交わらない」かの３通りだ。とかいって，つい勢いで「交わらないというのは実数の世界のことで，虚数の世界で交わっているのだ」なんて言ったことありませんか？虚数の世界で交わっているのを見たいという生徒がいたんです。さて,「複素関数（正則関数）を目で見る」ということを昔やって，なにか応用がないかと思っていたのです，実は。ちょうどよい応用ができました。

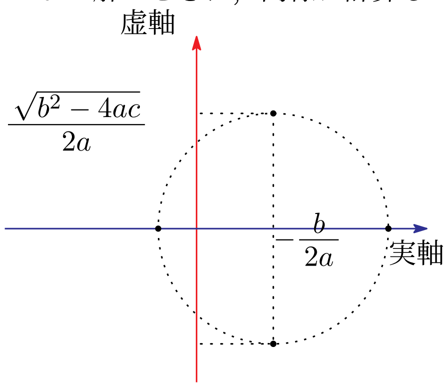
連立方程式 $y=x^2, y=a$ の解を目で見る。
虚数解を見るのだから， x を複素数にする。
新たに x を $x+yi$ とおけば x 軸が実軸， y 軸が虚軸，関数が z 軸となる。
$z=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ で，右上が実数部分のグラフ。
今回はこの虚数部分が 0 なので $z=x^2-y^2$ で,$x=0$ か $y=0$
結論，$y=0$ のとき，$z=x^2$， $x=0$ のとき，$z=-y^2$





上から見ると左図。方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解のときは，同様に計算して右図。

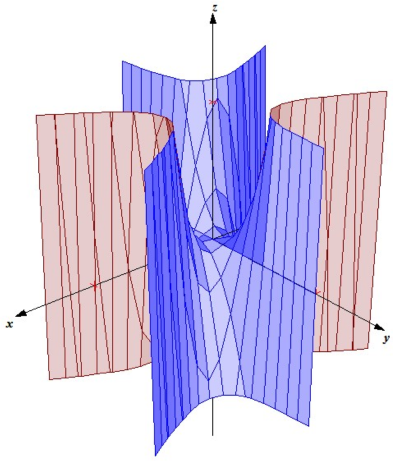




連立方程式 $y=x^3, y=a$ の解を目で見る。

$z=(x+yi)^3=x^3-3xy^2+(3x^2-y^2)yi$ として,

右が実数部分のグラフ。

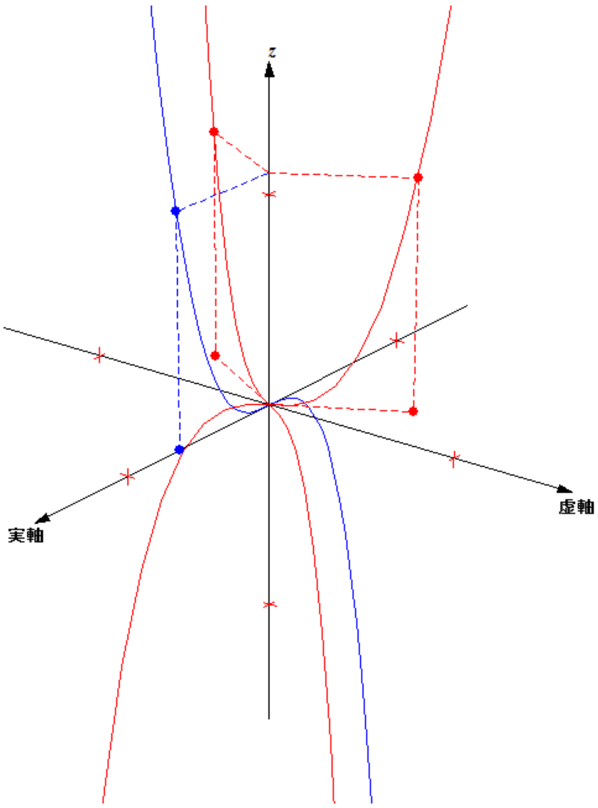


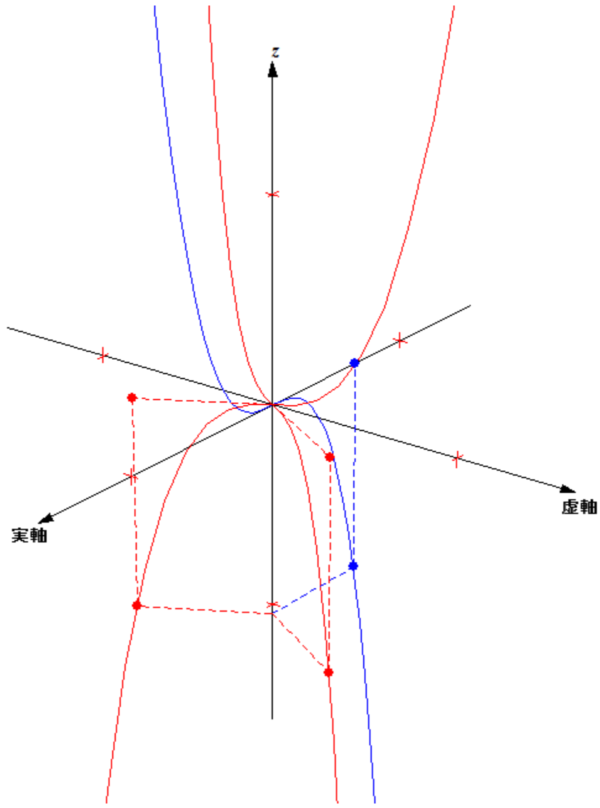
この虚数部分が 0 なので

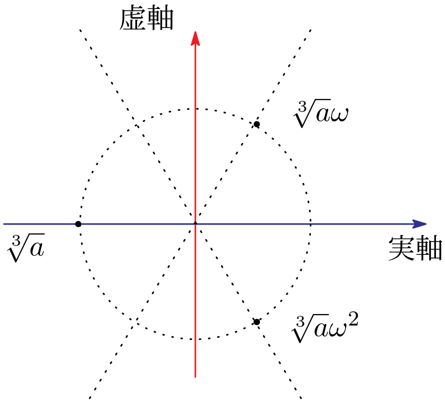
$z=x^3-3xy^2$ で,$3x^2=y^2$ か $y=0$

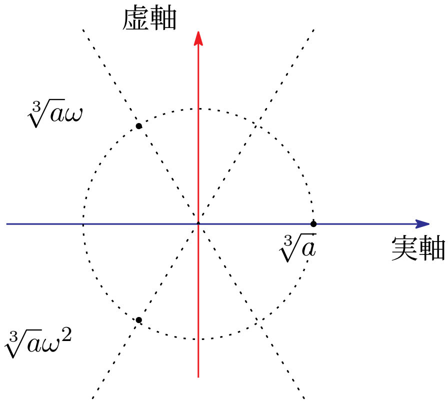
結論,

$y=0$ のとき，$z=x^3$，　$y^2=3x^2$ のとき，$z=-8x^3$

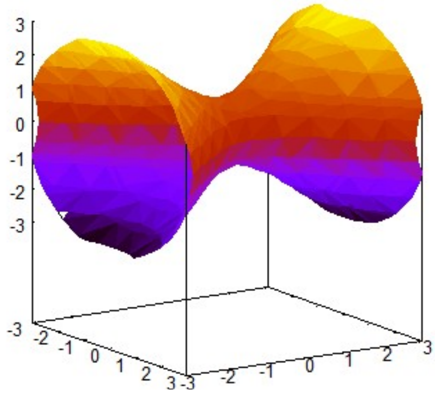




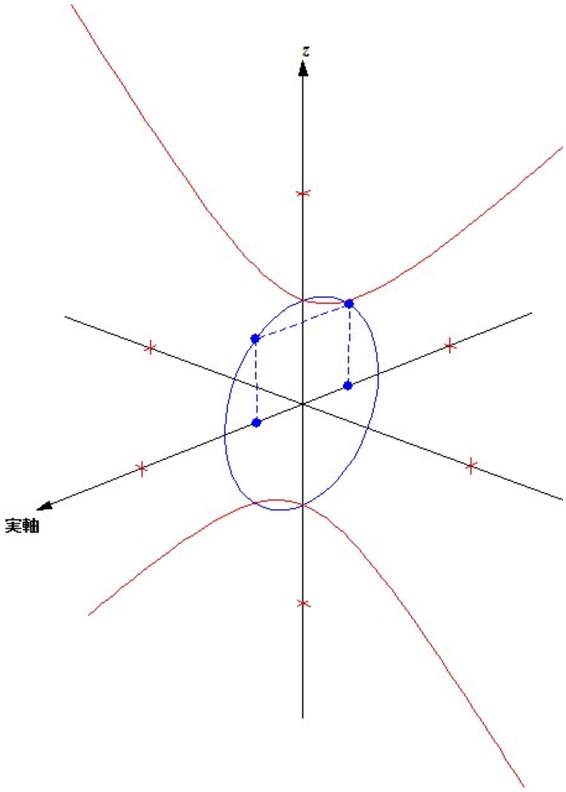


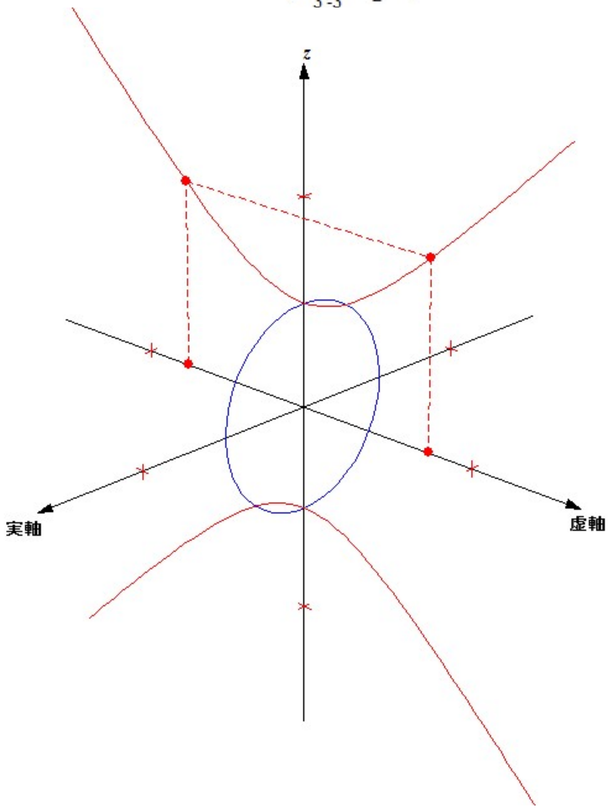


連立方程式 $x^2+y^2=1, y=a$ の解を目で見る。
$z^2=1-(x+yi)^2=1-x^2+y^2+2xyi$ として，
右が実数部分のグラフ。

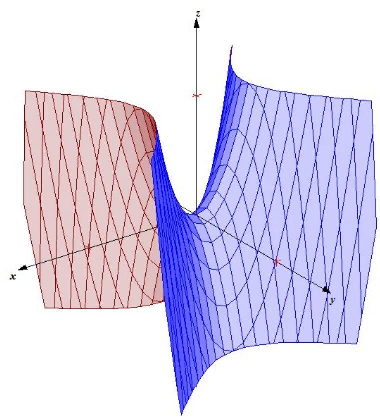


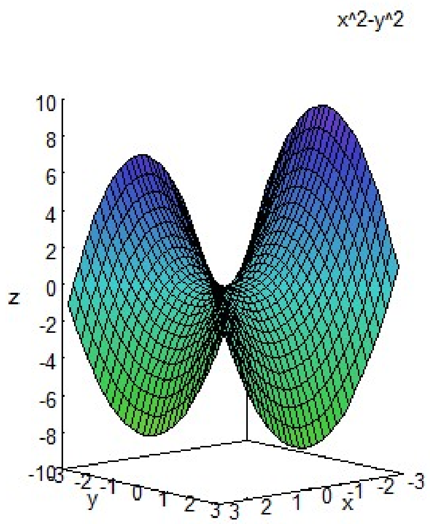
この虚数部分が 0 なので
$z^2=1-x^2+y^2$ で,$x=0$ か $y=0$
結論,
$y=0$ のとき，$z^2=1-x^2$，　$x=0$ のとき，$z^2=1+y^2$

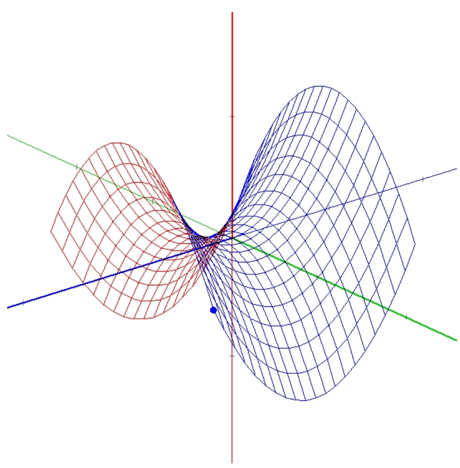




ついでに







Function View と Maxima+Gnupot と Grapes3D の違いを比べてみると
定義域の扱いが Function View 方式がわかりやすいように思うがどうだろう。

最後に３次方程式の解をグラフと関連して見ておくと

方程式は $x^3+px+q=0$ として，$y=x^3+px+q$ のグラフと $y=0$ との交点から，その実数解と虚数解を見る。共通していえることは，$4p^3+27q^2 \leqq 0$ のとき実数解のみ。

虚数解をもつとき，解を α,β,γ とすると $\alpha+\beta+\gamma=0$ より，３点 α,β,γ が作る三角形の重心が原点。

$|$実数解$|:|$虚数解の実数部分$|=2:1$

$p=0$ は上の状態。原点中心半径 $\sqrt[3]{|q|}$ の円の３等分点で，$q=0$ のとき３重解。

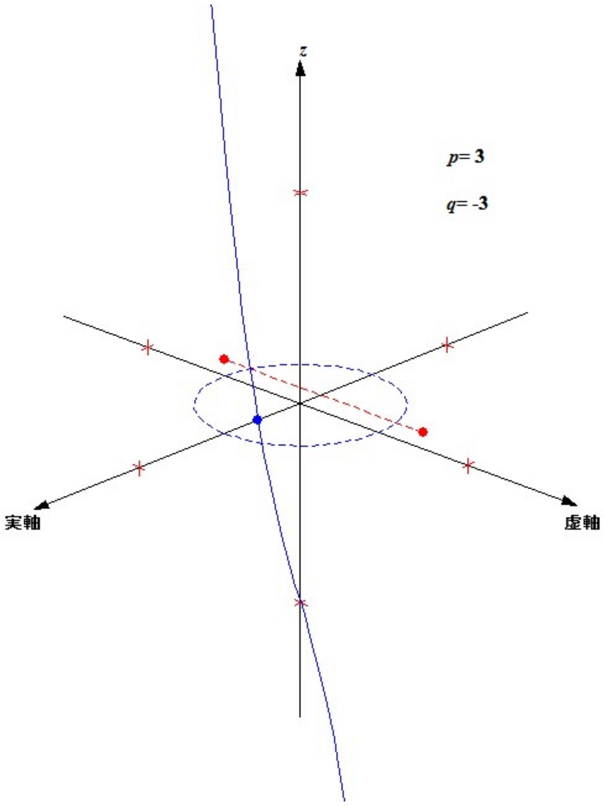
$p>0$ のとき，実数解１個，$x=\alpha$ とおくと，虚数解は $\dfrac{-\alpha \pm \sqrt{3\alpha^2+4p}\,i}{2}$

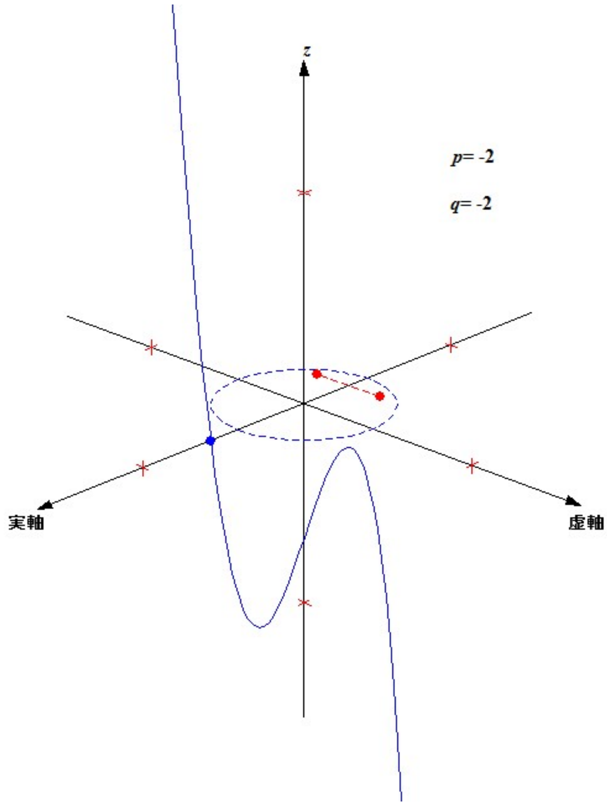
p が増えると，実数解は円の内部で原点に近づき，虚数解は虚軸に近づきつつ円の外部に遠ざかる。

$p<0$ のとき

p が減ると，実数解は円の外部に出て原点から遠ざかり，虚数解は円の内部で円に近づく。

このとき，q を増やすと実数解が２個３個となり，実数解の正負が逆になる。

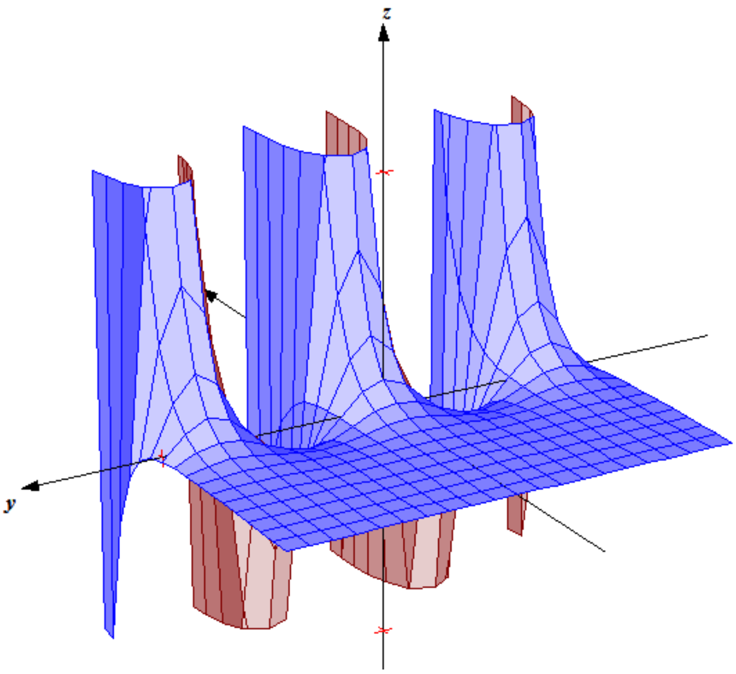




というわけで，正則関数の実数部分のグラフの応用ができた。実数解と虚数解の値に関する問題ができそうだ。

もっと，過激に行こうかな。最近（2012 年 5 月）高瀬 正仁さんの「私のオイラー」を読んで，この人は良く時間があるなあと思いつつ。

$e^x = a$ といこう。



$e^(x+yi) = e^x \cdot e^(yi) = e^x(\cos y + i\sin y)$

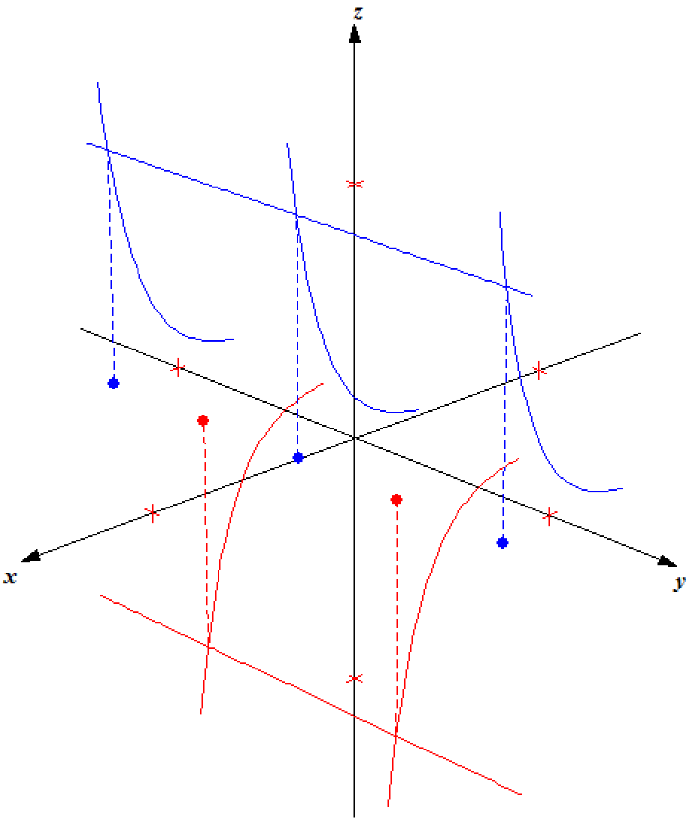
この実数部分のグラフが右図。

虚数部分を 0 とすると，$y = n\pi(n$ は整数)

それが下図。

$a > 0$ のとき $x = \log(a), y = 2n\pi(n$ は整数)

$a < 0$ のとき $x = log(-a), y = (2n+1)\pi(n$ は整数)



上記の本では，$2\log(-1) = \log(-1)^2 = \log 1 = 0$

$\log(-1) = 0$ で矛盾，というのがライプニッツとベルヌーイの論争であったとある。

集合として考えれば，$2\log(-1)$ は $\log 1$ に含まれなんら矛盾しない。

オイラーが，対数の値は多値として解決したというわけだ。