解析概論16　正則関数

５章　解析関数，とくに初等関数

さあいよいよ「微積分に魂を入れる」という，変数を複素数にまで拡張しよう。「近世数学史談」を再読してから，Cauchy-Riemann の微分方程式とか Laplace の微分方程式とか数学者の名前が出ると，ちょっとあの本の内容を思い出してしまいますね。

さて，複素数変数での微分可能な最も簡単なものとして z^n が出てきます。こいつを目で見てやろうと思いました。複素数から複素数だから，一気に見ようとすると４次元。ちと無理があるので，値域のほうを実部と虚部に分けて見てやろうというわけです。ついでに Cauchy-Riemann の微分方程式を具体的に計算しておきます。

$w=z^n, z=x+yi, w=u+vi$ とおくと $w=z^n=(x+yi)^n=x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}yi+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}(yi)^2+\cdots$

$=x^n-{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}y^2+\cdots+({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}y-{}_n\mathrm{C}_3x^{n-3}y^3+\cdots)i$

$\therefore u=x^n-\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^{n-2}y^2+\cdots, v=nx^{n-1}y-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^{n-3}y^3+\cdots$ なので

$u_x=nx^{n-1}-(n-2)\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^{n-3}y^2+\cdots, v_x=n(n-1)x^{n-2}y-(n-3)\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^{n-4}y^3+\cdots$

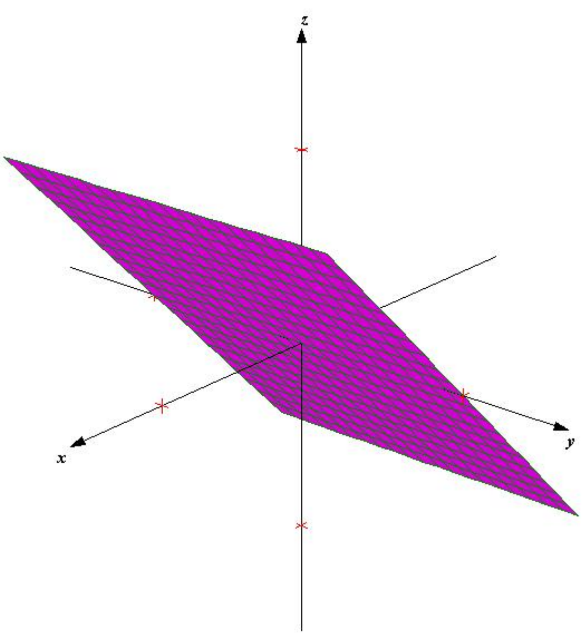
$u_y=-2\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^{n-2}y+\cdots, v_y=nx^{n-1}-3\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^{n-3}y^2+\cdots$ となり

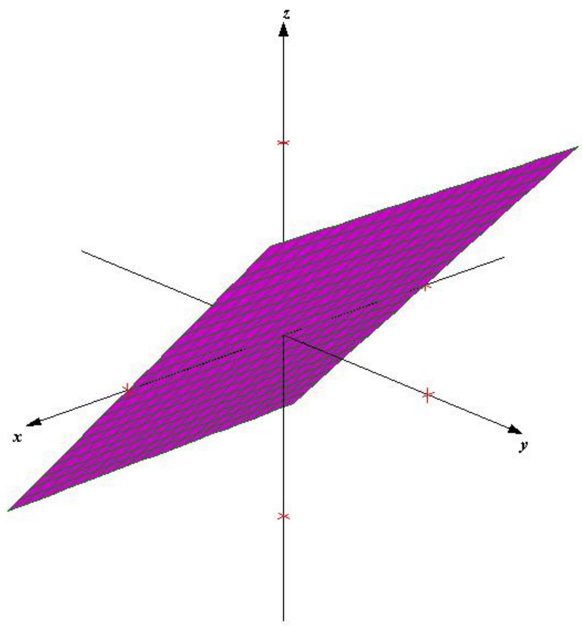
$u_x=v_y, u_y=-v_x$ **（Cauchy-Riemann の微分方程式）**

例によってファンクション・ビューで次のように関数を作りました。ファンクション・ビューを二つ起動して３Ｄの二つのグラフを比べながら良く見ると Cauchy-Riemann の微分方程式が解ったような気になります？

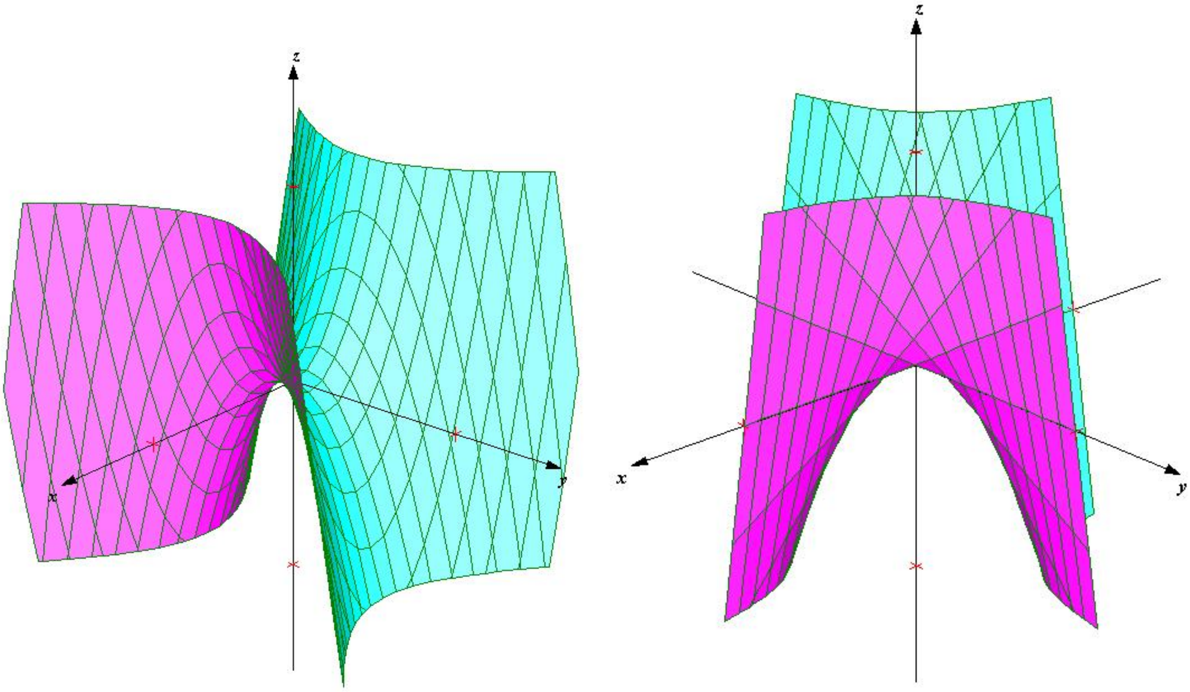
```
Sum(i=[0,gaus(n/2)](-1)^i*C(n,2*i)*x^(n-2*i)*y^(2*i))

Sum(i=[0,gaus((n-1)/2)](-1)^i*C(n,2*i+1)*x^(n-2*i-1)*y^(2*i+1))
```

$n=1$

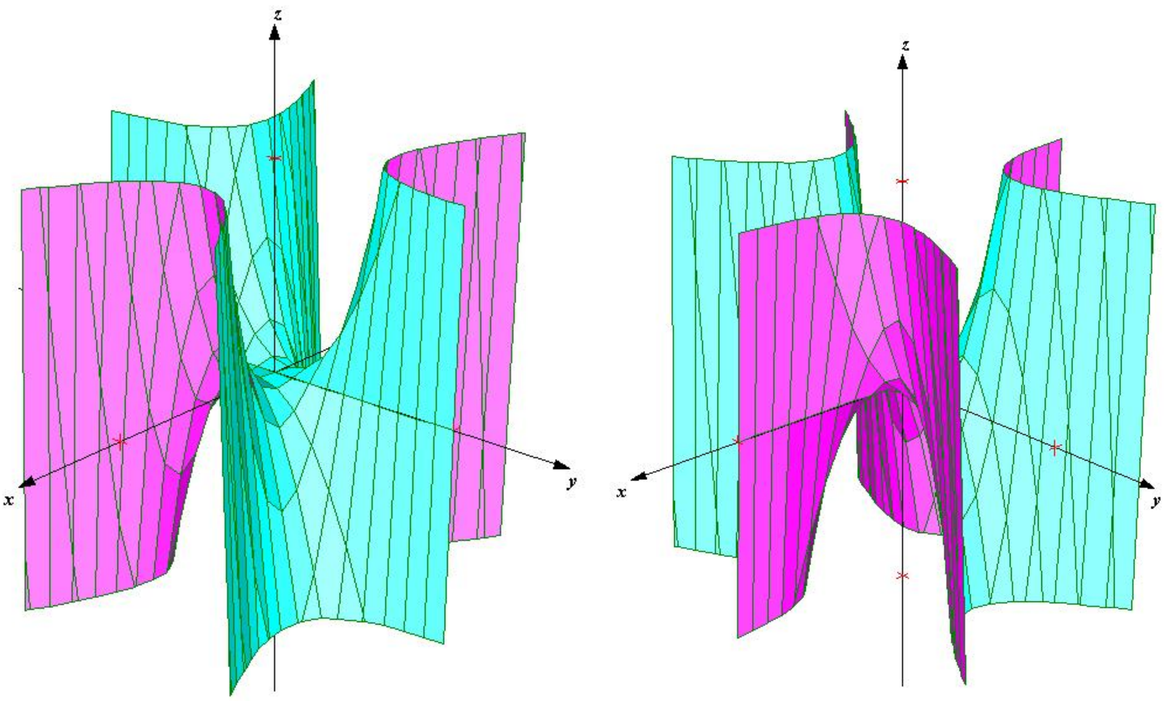




$n=2$



$n=3$



「微分可能といえば，一語簡単であるが，含蓄は多大である。」