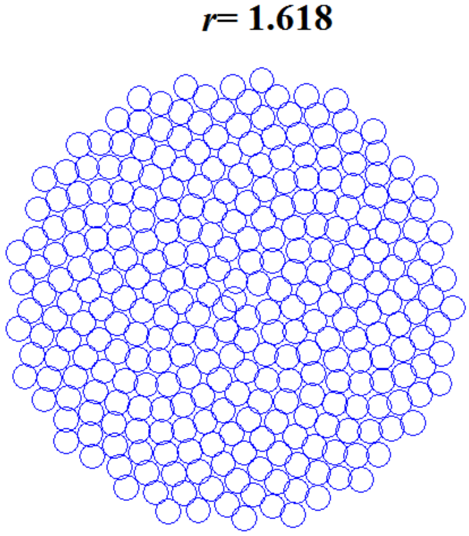
漸化式からカオスへ



　このヒマワリの種のような構造について調べてみる。回転しながら成長するとなると，この回転角が問題になる。回転角が $2\pi \times$ (比) これが，フィボナッチ数列の隣り合う２項の比だというのだ。

　さて，フィボナッチの数列といえば，$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ なる漸化式で決まる数列。

　同じ事の繰り返しといえばなんといっても漸化式，フラクタルにも漸化式がつきものだ。漸化式の扱い方をまとめてみよう。

問１　次の漸化式を解け。

(1)　$a_{n+1} = a_n + 1, a_1 = 0$　　　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n, a_1 = 2$

(2)　$a_{n+1} = a_n + n, a_1 = 0$　　　$a_{n+1} = na_n, a_1 = 1$　　　$na_{n+1} = (n+1)a_n, a_1 = 1$

(3)　１歩で１段または２段のいずれかで階段を昇るとき，１歩で２段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。（京都大）

代表的な隣接 2 項間漸化式と隣接 3 項間漸化式。この方法は等比数列に帰着させるということだ。
つまり，式の中からフラクタルの構造（等比数列）を探し，その種（不変なもの）を見つければいいのだ。

問 2

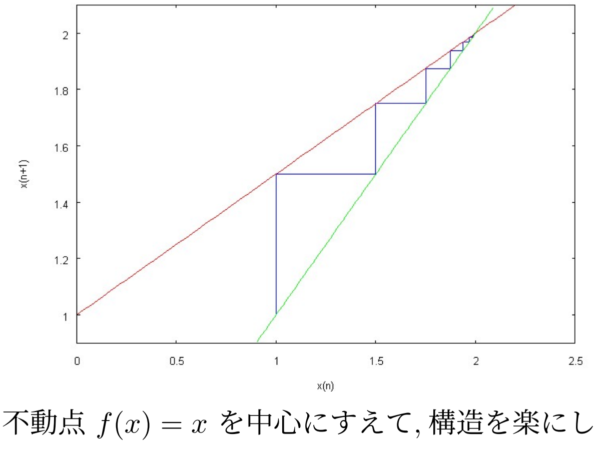
(1) $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$　　(2) $a_1 = -1, a_{n+1} = -2a_n + (-1)^{n+1}$

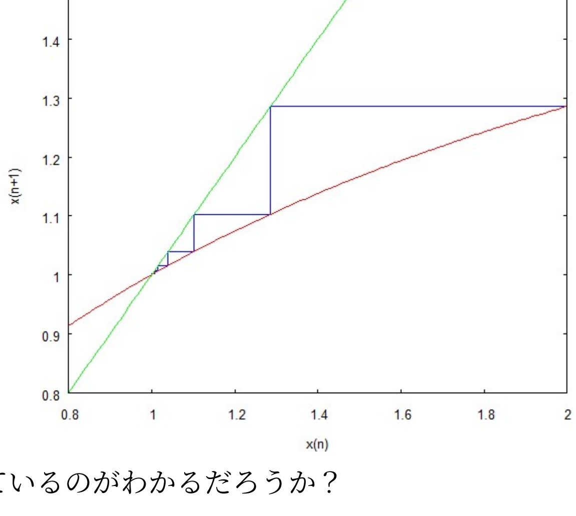
(3) $a_1 = 1, a_n = 2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^3 a_{n-1} + \dfrac{1}{n^3}$

調べてみたらほとんどは上の例, 等差等比に帰着されるもの。後は無理漸化式と分数漸化式でヒントに沿っていけば解ける。それ以外の漸化式は, 解けないものでも大きさとかは評価できたりするものだ。
$a_{n+1} = f(a_n)$ の形の漸化式。代表的な隣接 2 項間漸化式は, $f(x) = px + q$（$p \neq 1, q \neq 0$）のもの。

問 3

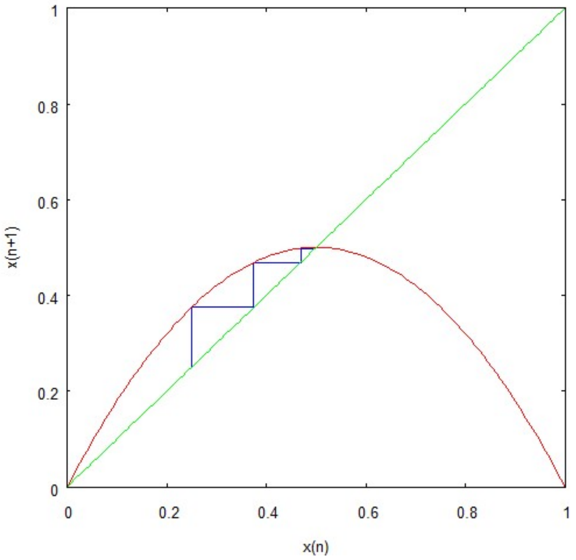
(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$　　(2)　$a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 1}{2a_n + 3}$ (東北大)





不動点 $f(x) = x$ を中心にすえて, 構造を楽にしているのがわかるだろうか？

(3) $a_1 = \dfrac{1}{4}, a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$（宮崎大・改）



漸化式　$a_{n+1} = aa_n(1 - a_n)$ なんとこれからフラクタルの次の話題，カオスが出る。

通常, 親が作る子孫の数は, ほぼ一定であるから, 増加率を r とすれば, 個体数 N の個体群における時間に対する（絶対）増加率は $\dfrac{dN}{dt} = rN$ で表される。これは指数曲線 $N = e^{rt}$ になって, あっという間に人口爆発を引き起こす。この様な個体群成長の型を, 生物個体（人口）の増加が幾何級数的（等比級数）であることを最初に指摘したトマス・ロバート・マルサスにちなんでマルサス的成長と呼ぶこともある。現実の生物は, ある特定の環境下で生活しており, そこに生活できる個体数には上限があると見るのが自然である。つまり, 個体数が多くなると, その増加にブレーキがかかるものと想像される。そこで, そのような, 現実の個体数変化を説明するためには, 次のような性質の式が必要になる。

個体数 $N = 0$ では, 増加率が 0 になる。

個体数が増加するにつれ, 増加率は減少する。

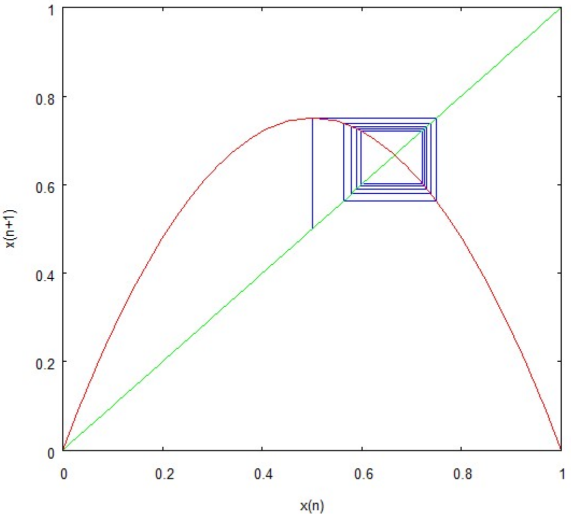
環境の収容可能個体数に限度があるから, その数を K とすれば,$N = K$ のとき, 増加率は 0 になる。

ロジスティック式は,1838 年にベルハルストが考案した。彼は, 人口増加を説明するモデルとして, この式を考案した（彼が兵站学 (ロジスティクス) 教官であったためロジスティックと命名したといわれる）。その後, 独自に同様の式を提示した個体群生態学者などもおり, 次第に, 個体群モデルの基礎となった。ロジスティック式は, 上記の条件をすべて備えている。ロジスティック式　$\dfrac{dN}{dt} = aN(1 - N)$

漸化式の出所がわかりましたか？この漸化式は不動点 $ax(1 - x) = x$ の解で片がつくんだよな。

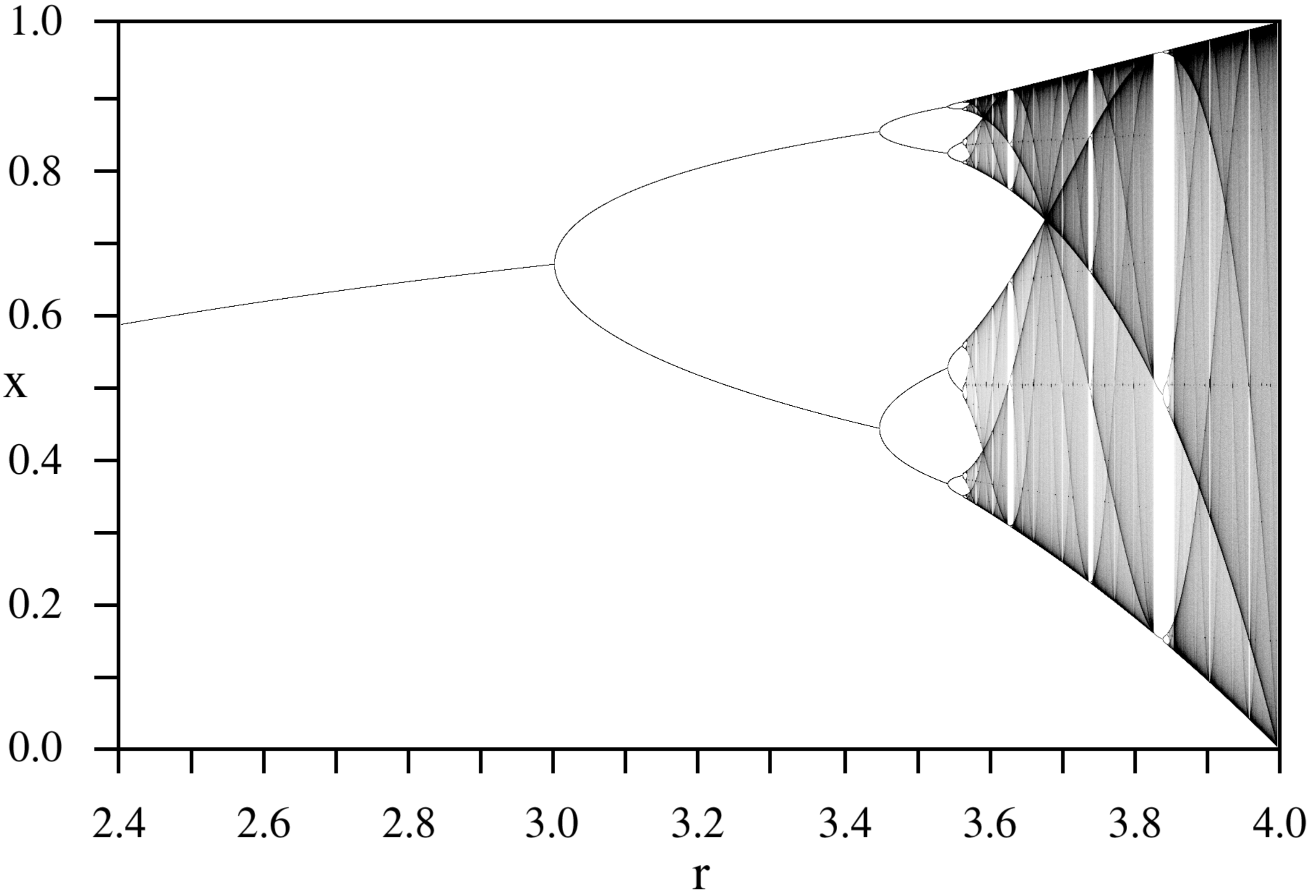
ところが，これが漸化式となると飛び飛びの値をとるので変なことが起きる。それがカオス理論の始まりとなったものだという。

例えば $a = 3.1$ のとき，つまり $a_{n+1} = aa_n(1 - a_n), a_1 = \dfrac{1}{2}$



つまり，$ax(1 - x) = y, ay(1 - y) = x$ となる x, y についてはめざす数値（収束値）が２つあることになってしまう。

最後の問　$ax(1 - x) = y, ay(1 - y) = x$ を解け。ただし，一つの解は $ax(1 - x) = x, x \neq 0$ の解である。



解答

問１　取り去る部分は　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3\cdot 3}+\dfrac{4}{3\cdot 3\cdot 3}+\cdots=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1$ つまり長さ 0

問２　$1,\dfrac{4}{3},\left(\dfrac{4}{3}\right)^2,\cdots\to\infty$ つまり長さ無限大 ∞

コッホの雪片　(1) $a_0=3, a_1=3\cdot 4,\cdots,a_n=3\cdot 4^n, l_0=1, l_1=\dfrac{1}{3},\cdots,l_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(2) $S_0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}, S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{9}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3,\cdots,S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(1+\dfrac{4}{9}+\cdots\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\dfrac{1}{1-\frac{4}{9}}=$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\dfrac{9}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

(3)S_0 : (2) の答 $=5:8$ フィボナッチの 2 項の比だ，黄金数に近い。

ガスケット　(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4\cdot 4}+\dfrac{9}{4\cdot 4\cdot 4}+\cdots\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)=0$

(2) $3+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\cdot 3}{4}+\cdots\right)\to\infty$

問３　１次元　$\log_2 2=1$ 2 次元　$\log_2 4=2$ 3 次元　$\log_2 8=3$

問４　$\log_{10}2=0.3010, \log_{10}3=0.4771$ だから, カントル集合は 3 倍にすると同じものが 2 つできる

カントル集合　$\log_3 2=\dfrac{0.3010}{0.4771}=0.6309$　長さなしだから 1 次元より小さい

コッホ曲線　$\log_3 4=\dfrac{2\times 0.3010}{0.4771}=1.2618$　長さ無限大だから 1 次元より大きい

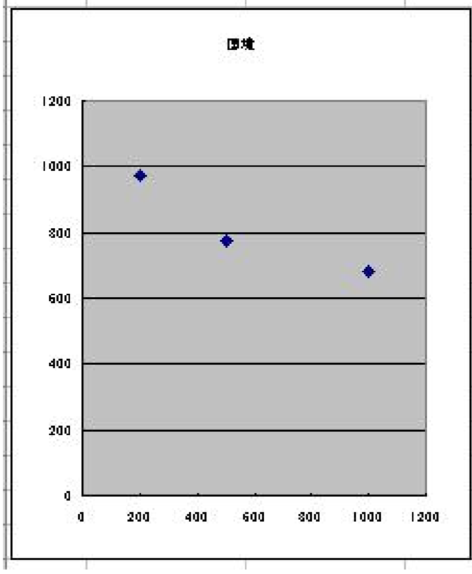
ガスケット $\log_2 3=\dfrac{0.4771}{0.3010}=1.5850$　面積なしだから 2 次元より小さい

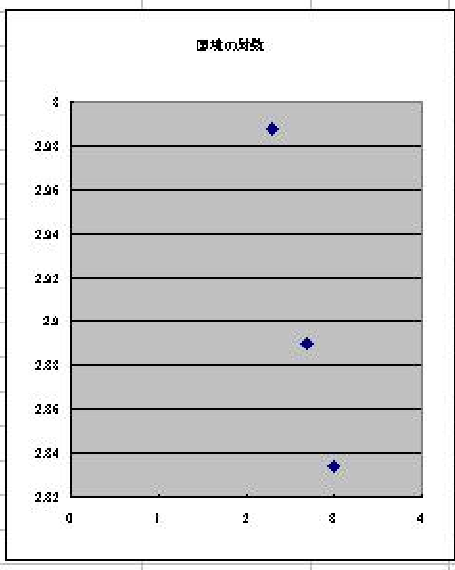
カーペット $\log_3 8=\dfrac{3\times 0.3010}{0.4771}=1.8927$　面積なしだから 2 次元より小さい

スポンジ　$\log_3 20=\dfrac{1+0.3010}{0.4771}=2.7269$　2 次元より大きく 3 次元より小さい

問５ 対数をとると直線に並ぶ（比例する）のが見える。

縮尺	縮尺の長さ	国境の長さ	国境	縮尺の対数	国境の対数
1000	2.2	1.5	682	3	2.83366858
500	2.9	4.5	776	2.69897	2.88978452
200	3.5	17	971	2.30103	2.98741087





問１ (1)$a_n=a_{n-1}+1=a_{n-2}+1+1=\cdots=n-1$　公式的にやると　$a_n=a_1+(n-1)1=n-1$

(2)$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2a_{n-2}=\cdots=\dfrac{1}{2^{n-2}}$　公式的にやると　$a_n=a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-2}}$

(2) $a_n=a_{n-1}+n-1=a_{n-2}+n-2+n-1=\cdots=n-1+n-2+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

公式的にやると　$n\geqq 2$ のとき $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$a_n=(n-1)a_{n-1}=(n-1)(n-2)a_{n-2}=\cdots=(n-1)!$

変形して（両辺を $n(n+1)$ で割る） $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$ よって $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\dfrac{a_1}{1}=1\therefore a_n=n$

(3) $a_1=1,a_2=2,a_3=3$ 最初に１段登るか２段登るかで場合に分けると $n\geqq 3$ のとき $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$

このルールで次々計算して $a_{15}=277$

問２ (1) 変形して $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ よって $a_n+1=(a_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n\therefore a_n=2^n-1$

(2) 変形して（両辺を $(-1)^{n+1}$ で割って） $\dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=2\dfrac{a_n}{(-1)^n}+1$

よって (1) より $a_n(-1)^n=2^n-1\therefore a_n=(-1)^n2^n-(-1)^n=(-2)^n-(-1)^n$

(3) 変形して（両辺に n^3 をかけて） $n^3a_n=2(n-1)^3a_{n-1}+1$

よって (1) より $n^3a_n=2^n-1\therefore a_n=\dfrac{2^n-1}{n^3}$

問３ (1) 変形して $a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$ よって $a_n-2=(a_1-2)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

(2) 特性方程式 $\alpha=\dfrac{4\alpha+1}{2\alpha+3}$ の解 $\alpha=-\dfrac{1}{2},1$ の 1 を使って変形し（$\alpha=\dfrac{1}{2}$ でもできる）

$a_{n+1}-1=\dfrac{4a_n+1}{2a_n+3}-1=\dfrac{2(a_n-1)}{2a_n+3}=\dfrac{2(a_n-1)}{2(a_n-1)+5}$

逆数をとり $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{2(a_n-1)+5}{2(a_n-1)}=\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{a_n-1}+1$

変形して $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{a_n-1}+\dfrac{2}{3}\right)$ よって $\dfrac{1}{a_n-1}+\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{5^n}{3\cdot 2^{n-1}}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{\dfrac{5^n}{3\cdot 2^{n-1}}-\dfrac{2}{3}}+1=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{5^n-2^n}+1=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}+5^n-2^n}{5^n-2^n}=\dfrac{5^n+2^{n-1}}{5^n-2^n}$

(3) 特性方程式 $\alpha=2\alpha(1-\alpha)$ の解 $\alpha=\dfrac{1}{2},0$ の $\dfrac{1}{2}$ を使って変形し

$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=2a_n-2a_n^2-\dfrac{1}{2}=-2\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)^2$

対数をとり $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_{n+1}\right)=2\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_n\right)+1$

変形して $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_{n+1}\right)+1=2\left\{\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_n\right)+1\right\}$

よって $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_n\right)+1=\left\{\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_1\right)+1\right\}2^{n-1}=-2^{n-1}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{2}-2^{-2^{n-1}-1}$

最後の問

$y=ax(1-x)$ を代入し $aax(1-x)\{1-ax(1-x)\}=x$ 整理し $a^3x^3-2a^3x^2+a^2(a+1)x-a^2+1=0$

$x=1-\dfrac{1}{a}$ を解にもつから $ax-a+1$ で因数分解し $(ax-a+1)\{a^2x^2-a(a+1)x+a+1\}=0$

解の公式より $x=\dfrac{a+1\pm\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$ つまり $a>3$ のとき２つある。