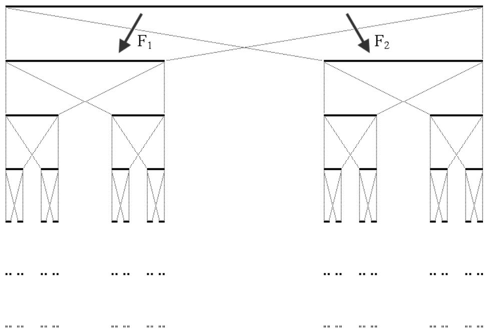
ロマネスコ（fr:Chou romanesco）明確なフラクタル図形をした野菜。
名前はイタリアのローマ方言を意味する romanesco に由来

無限等比数列からフラクタルへ

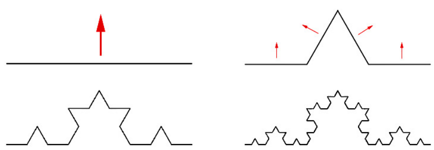
フラクタル（仏：fractale）は, フランスの数学者ブノワ・マンデルブロ (Benoit Mandelbrot) が導入した（1967 年）幾何学の概念。図形の部分と全体が自己相似になっているものなどをいう。

例 1　G. カントルの三進集合（**カントル集合**ともいう）
カントル（1845〜1918）集合論の創始者として有名。
線分を 3 等分し，両端の二つの小線分を残す（長さ $\frac{1}{3}$ の開区間を中央から取り去る）という操作を無限に行い，元の線分上に最後まで残っている点の集合。



問 1　この集合の長さを, 取り去る部分の和（無限等比級数）を計算することによって求めよ。(Ans.0)

例 2　コッホ曲線
コッホ曲線（コッホきょくせん, 英語: Koch curve）はフラクタル図形の一つ。スウェーデンの数学者ヘルゲ・フォン・コッホ (Helge von Koch) が 1906 年に考案した。線分を 3 等分し, 分割した 2 点を頂点とする正三角形の作図を無限に繰り返すことによって得られる図形である。完全なものは作図することができない。



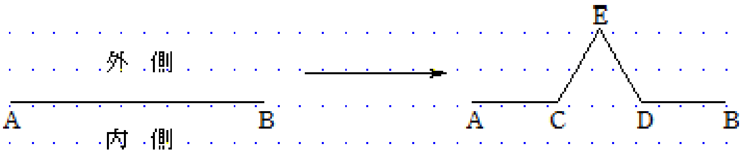
問 2　最初の長さを 1 として, この曲線の長さを計算せよ。(Ans.∞)

コッホ曲線の具体的な例としては海岸線の形などが挙げられる。海岸線は微視的にみると複雑に入り組んだ形状をしているが, これを拡大するとさらに細かい形状が見えてくるようになり, 結果として拡大しても同じように複雑に入り組んだ形状をしている。（極限操作で, 不連続だったり, 微分不可能だったり）これに対して, 一般的な図形は, 拡大するにしたがって, その細部は変化が少なくなり, なめらかな形状になっていく(微分可能)。

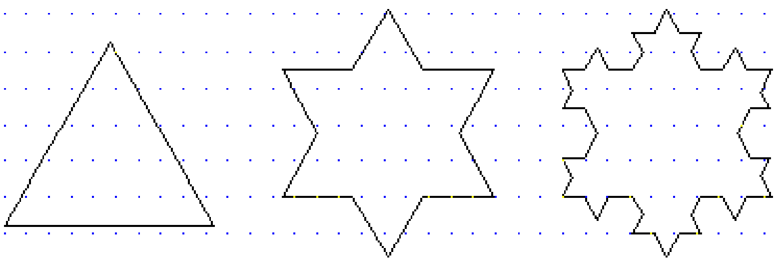
そして, 海岸線の長さを測ろうとする場合, より小さいものさしで測れば測るほど, 大きなものさしでは無視されていた微細な凹凸が測定されるようになり, その測定値は長くなっていく。したがって, このような図形の長さは無限であると考えられる。これは, 実際問題としては, 分子の大きさ程度よりも小さいものさしを用いることは不可能だが, 理論的な極限としては測定値が無限大になるということである。

問３　06 年鳥取大学医学部入試に出た次の問題はコッホの雪片そのまま。

(ア)　多角形の辺，それを仮に AB とすると，辺 AB を 3 等分する点 C，D をこの順に　A に近い方からとり，これら 2 点を頂点とする正三角形の C，D 以外の頂点を E とし，　点 A，C，E，D，B を順に線分で結んでできる折れ線により，辺 AB をおきかえる。　ただし，点 E は常に多角形の外側にとるものとする。



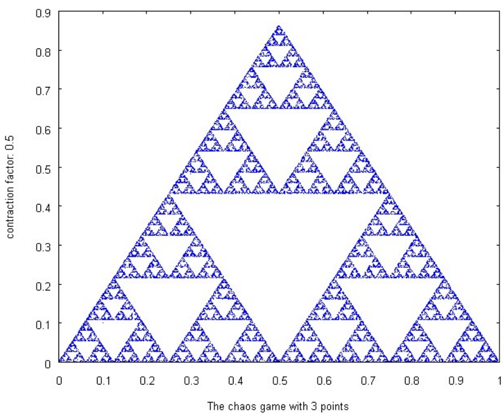
1 辺の長さが 1 の正三角形 T_0 の各辺に対し，上の操作 (ア) を施してできる多角形を T_1，T_1 の各辺に対し操作 (ア) を施してできる多角形を T_2，T_2 の各辺に対し操作 (ア) を施してできる多角形を T_3，以下同様にして，多角形 T_n から多角形 $T_{(}n+1)$ を作る。(下の図は左から順に，T_0，T_1，T_2 をかいたものである。)



(1) 多角形 T_n に含まれる辺の個数 a_n および 1 辺の長さ l_n を, それぞれ n を用いて表せ。
(2) 多角形 T_n の面積 S_n を n を用いて表し,$n \to \infty$ のときの極限を調べよ。
(3) S_0 と (2) の比を求めよ。(改)

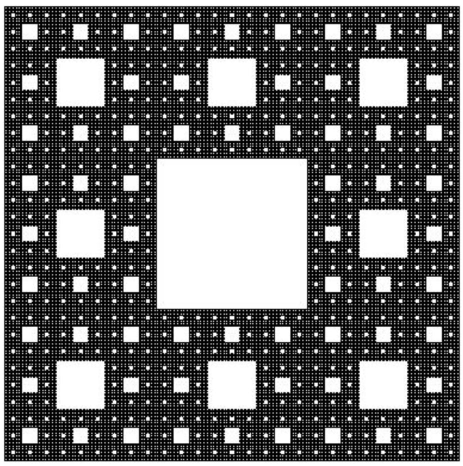
(Ans.$a_n = 3 \cdot 4^n, l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \frac{2\sqrt{3}}{5}, 5:8$)

例３　シェルピンスキーのガスケット（1910 年代に解析集合論を開始した，gasket：薄板状のパッキング）
ポーランドの数学者ヴァツワフ・シェルピンスキにちなんで名づけられた。シェルピンスキーの三角形（英: Sierpinski triangle）, シェルピンスキーのざる（英: Sierpinski sieve）とも呼ばれる。

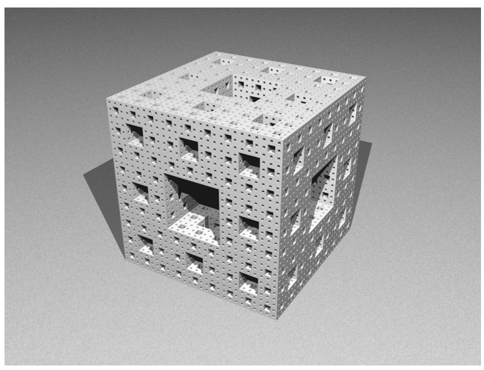


問４　これについて計算をしよう。
n 回操作（真ん中の三角形を抜く）したあとの面積を S_n , 周囲の長さ L_n とするとき, 次を求めよ。
スタートは１辺の長さ１の正三角形としよう。
(1) $\lim_{n\to\infty} S_n$(Ans.0)
(2) $\lim_{n\to\infty} L_n$(Ans.∞)

例４　シェルピンスキーのカーペット（英: Sierpinski carpet）
1919 年, ヴァツワフ・シェルピンスキが発表した平面フラクタル。カントール集合を２次元に一般化したものである。シェルピンスキーのカーペットを構築するには, 正方形を始点とする。正方形を９つの合同な部分正方形に分割し, ちょうど各辺が３分割されるようにし, 中央の部分正方形を取り除く。同じことをそれぞれの残りの８つの部分正方形に「無限に」再帰的に適用する。カーペットの面積は（標準的なルベーグ測度では）０である。



例５　メンガーのスポンジ
メンガーのスポンジのイメージメンガーのスポンジとは自己相似なフラクタル図形の一種であり, 立方体に穴をあけたものである。メンガーのスポンジの次元は２より大きいため,2 次元的な大きさである面積は無限である。メンガーのスポンジの次元は３より小さいため,3 次元的な大きさである体積は０である。実際, メンガーのスポンジを構成する過程で, 穴を開けるたびに体積は小さくなり, 完全なメンガーのスポンジではその体積は０になる。

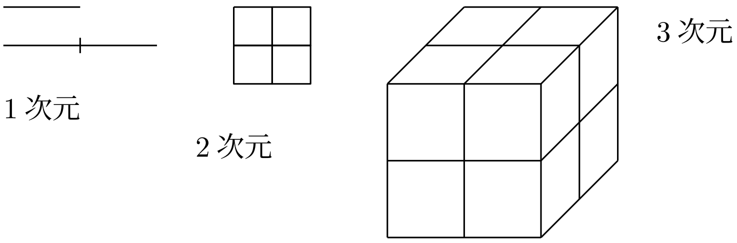


始まりは, イギリスの気象学者ルイス・フライ・リチャードソンの国境線に関する検討である。国境を接するスペインとポルトガルは, 国境線の長さとしてそれぞれ 987km と 1214km と別の値を主張していた。リチャードソンは, 国境線の長さは用いる地図の縮尺によって変化し, 縮尺と国境線の長さがそれぞれ対数を取ると直線状に相関することを発見した。

例えば, 普通の直線は, 2 倍に拡大すると, 長さも 2 倍になる。ところが複雑な海岸線のように 2 倍に拡大すると, 長さは 2 倍を超えることもある, ということだ。これがハウスドルフ次元の定義の元になっているような気がする。つまり, 図形を m 倍したとき同じものが n 個できるとき,$\log_m n$ をその図形の次元とするというものだ。

このような図形を評価するために導入されたのが, 整数以外の値にもなるフラクタル次元（1919 年にハウスドルフ F.Hausdorff とベシコビッチ A. Besikovi が発見）である。フラクタル次元は, 数学的に定義された図形などでは, 厳密な値が算出できることもあるが, 前述の海岸線などの場合は, フラクタル次元自体が測定値になる。つまり, 比較的なめらかな海岸線では, フラクタル次元は線の次元である 1 に近い値となり, リアス式海岸などの複雑な海岸線では, それよりは大きな値となり, その値により図形の複雑さが分かる。なお, 実際の海岸線のフラクタル次元は 1.1〜1.4 程度である。海岸線の形, 山の形, 枝分かれした樹木の形などの 3 次元空間内に存在するもののフラクタル次元は,0 より大きく 3 以下の値になるが, 数学的にはさらに高次の次元を持つものも考えられる。この様な図形のほとんどは分数（fraction, フラクション）の次元を持ったフラクタルな図形と呼ばれる。ただし, 実際には, フラクタル次元は, 分数になるというよりは無理数になる。また, 中には整数の次元を持つものもある。その例としてはマンデルブロ集合の周があり, これは曲線でありながら 2 次元である。

問 5　下の図を見て, 直線・直方体・立方体のハウスドルフ次元を求めよ。(Ans.1,2,3)



問 6　カントル集合，コッホ曲線，シェルピンスキーのガスケット，シェルピンスキーのカーペット，メンガーのスポンジのハウスドルフ次元を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 =$ 　　　　,$\log_{10} 3 =$ 　　　　とする。

(Ans.0.6309,1.2618,1.5850,1.8927,2.7269)

問 7　次のグーグルの地図でちょっと追体験してみるか。

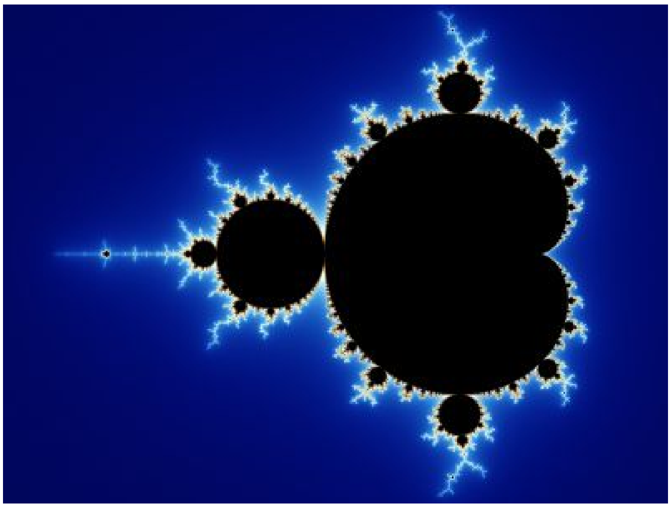
a:縮尺	b:縮尺の長さ cm	c:　国境の長さ cm	国境 $\frac{c}{a}d$
	1000 km		
	500 km		
	200 km		

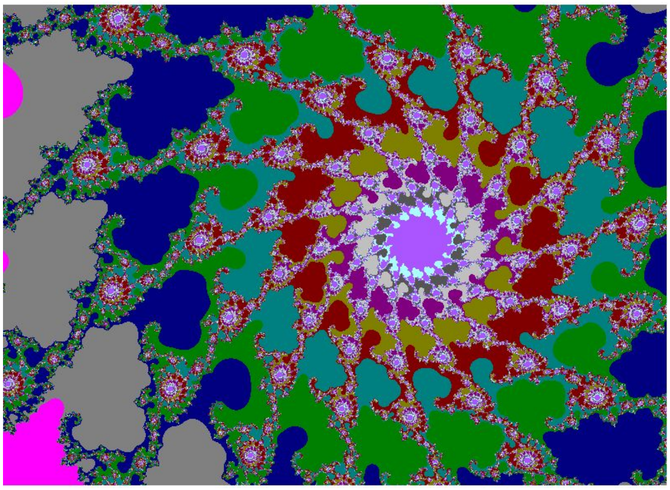
この様な特徴をフラクタルと名付けて一般化したのが**マンデルブロ**（2010 年 10 月に死去した経済学者で数学の博士号取得の後経済学者となる)。である。マンデルブロは株価チャートを見ていてフラクタルの着想を得たという。フラクタルの特徴は直感的には理解できるものの, 数学的に厳密に定義するのは非常に難しい。マンデルブロはフラクタルを「ハウスドルフ次元が位相次元を厳密に上回るような集合」と定義した。

近似的なフラクタルな図形は自然界のあらゆる場面で出現されるとされ（例：樹木の枝分かれ）, 自然科学の新たなアプローチ手法となった。逆に, コンピュータグラフィックスにおける地形や植生などの自然物形状の自動生成のアルゴリズムとして用いられる事も多い（フラクタル地形など, 有名なところでは「Star Wars」「Star Trek」)。また, 自然界で多くみられる一見不規則な変動（カオス）をグラフにプロットするとそのグラフはフラクタルな性質を示すことが知られ, カオスアトラクターと呼ばれる。株価の動向など社会的な現象もフラクタルな性質を持っている。当然, 数学的に厳密なフラクタルは無限大を含むため自然界では成立しえず, 近似である。

血管の分岐構造や腸の内壁などはフラクタル構造であるが, それは次のような理由によるものだろうと考えられている。例えば血管の配置を考えたとき, 人体において体積は有限であり貴重なリソースであると言えるので, 血管が占有する体積は可能な限り小さいことが望ましい。一方, ガス交換等に使える血管表面積は可能な限り大きく取れる方が良い。このような目的からすると, 有限の体積の中に無限の表面積を包含できるフラクタル構造（例えばメンガーのスポンジを参照）は非常に合理的かつ効率的であることが解る。しかも, このような構造を生成するために必要な設計情報も, 比較的単純な手続きの再帰的な適用（漸化式だ）で済まされるので, 遺伝情報に占める割合もごく少量で済むものと考えられる。

例 6　マンデルブロー集合（マンデルブロしゅうごう,Mandelbrot set）
漸化式 $z_{n+1} = z_n^2 + c, z_0 = 0$ で定義される複素数列が $n \to \infty$ の極限で無限大に発散しないという条件を満たす複素数 c 全体が作る集合。図中の黒い部分がマンデルブロ集合に相当。無限大に発散する速さを色で表わしたとてもきれいなものジュリア集合も知られている。





平面幾何学上で, マンデルブロ集合の周を拡大すると, 元のものとよく似た形が繰り返して現れるが, 全て少しずつ違っている。つまりマンデルブロ集合の周は自己相似ではないフラクタルの一種であり, その相似次元は平面内の曲線としては最大の 2 次元である。