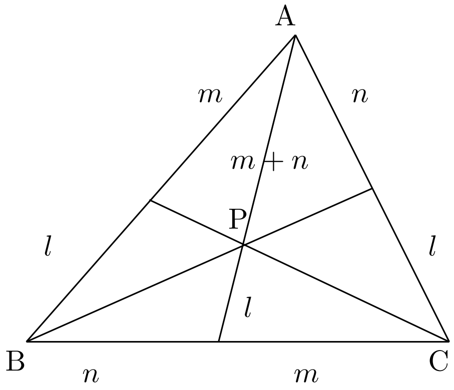
三角形の五心をベクトルで探る

the center of a triangle かな。heart にも中心という意味があるから五心でいいか。
重心，内心，傍心，外心，垂心を，位置ベクトルの解析から眺める。
最初に，チェバ・メネラウスの定理をやっておいて

$$\vec{p} = \frac{(m+n)\dfrac{m\vec{b}+n\vec{c}}{m+n}+l\vec{a}}{m+n+l} = \frac{l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}}{m+n+l}$$



重心（center of gravity，centroid, barycenter）

これは簡単。$m = n = l = 1$ なので

重心
$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

内心（inner center）

これも角の二等分の定理があるので簡単。$m = b, n = c, l = a$ から

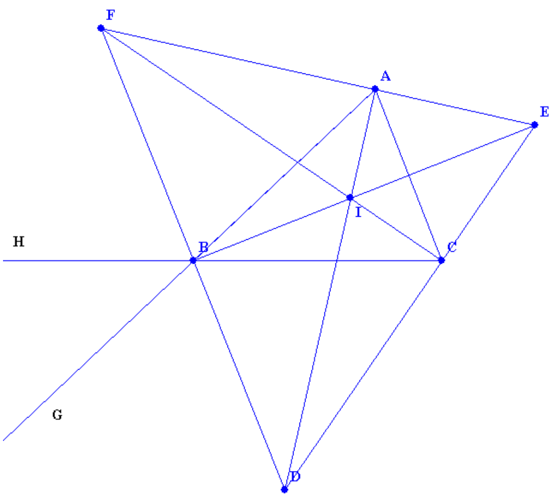
内心
$$\vec{i} = \frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$$

傍心（excenter）
これも外角の二等分線との交点なので実にきれいにいく。

傍心
$$\vec{i_A} = \frac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{-a+b+c} \qquad \vec{i_B} = \frac{a\vec{a}-b\vec{b}+c\vec{c}}{a-b+c} \qquad \vec{i_C} = \frac{a\vec{a}+b\vec{b}-c\vec{c}}{a+b-c}$$

途中で導き出せた定理　その１

内心と傍心三角形（傍心を頂点とする三角形）の垂心は一致する。



I は内心なので ∠ ABI=∠ IBC,
D，F は傍心なので，
∠ CBD ＝∠ DBG ＝∠ ABF
よって，EB ⊥ DF

垂心（orthocenter）
これは，三角比を使うのでやや複雑だ。
A から垂線を下ろしその足を A ’とすると $BA' = c\cos B, A'C = b\cos C$
同様にして l が同じになるように工夫すると
$m = b\cos A\cos C, n = c\cos A\cos B, l = a\cos B\cos C$
余弦定理で $cosA$ などを $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ などと直し

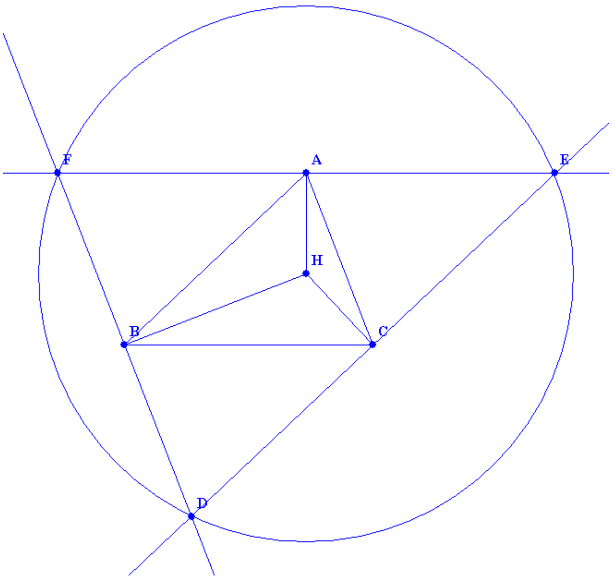
垂心

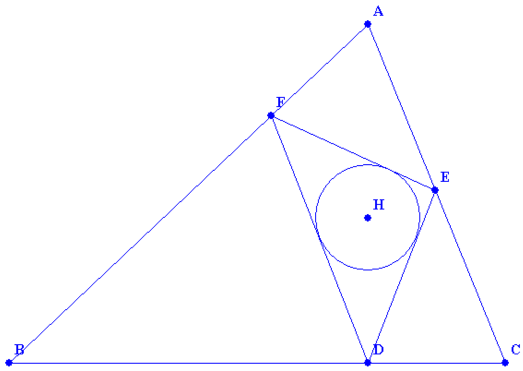
$\vec{h} = \dfrac{1}{d}\{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\vec{a}+(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\vec{b}+(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)\vec{c}\}$
ただし $d = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とすると　$d = 16s(s-a)(s-b)(s-c) = 16S^2$　S はヘロンによる面積

途中で導き出せた定理　その２

垂心は平行三角形（各頂点を通り各辺に平行に引いた線で出来る三角形）の外心と一致する。

下左の図から明らか





途中で導き出せた定理　その３

垂心と垂足三角形（垂線の足を頂点とする三角形）の内心は一致する。

まあ，これは定理その１の裏返しですけど。
上右の図で $DC = b\cos C, EC = a\cos C$ なので $\triangle ABC \triangle DEC \therefore \angle EDC = A$ 同様に$\angle FDB = A$
つまり HD は$\angle FDE$ の２等分線
ついでに，垂足三角形の外心は有名な９点円の中心。

外心（circumcenter）
これはすぐにチェバ・メネラウスの定理を使う方法が思いつかない。
$\vec{e}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおいて $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ から

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\vec{b}}{2}-\vec{e}\right)\cdot\vec{b}=0\\ \left(\dfrac{\vec{c}}{2}-\vec{e}\right)\cdot\vec{c}=0\end{cases}\quad \text{でもいいし}\quad \begin{cases}\left|\vec{b}-\vec{e}\right|^2=\left|\vec{e}\right|^2\\ \left|\vec{b}-\vec{e}\right|^2=\left|\vec{e}\right|^2\end{cases}\quad \text{でもいい}$$

で，$m=b^2(a^2-b^2+c^2),n=c^2(a^2+b^2-c^2),l=a^2(-a^2+b^2+c^2)$ でいいことがわかり

外心

$$\vec{e}=\frac{1}{d}\left\{a^2(-a^2+b^2+c^2)\vec{a}+b^2(a^2-b^2+c^2)\vec{b}+c^2(a^2+b^2-c^2)\vec{c}\right\}$$

まったくきれいなもんです。
垂心と外心はきれいとはいえ手計算ではちょっとねえ。もちろん Maxim を計算で使いました。MsMathmatics は因数分解が弱いのでちょっとここまでは使えません。

あの，Euler 線の証明もこれでいけます。
$2\vec{e}+\vec{h}$ を計算すると見事に $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}$

もっともこれでは発見的ではないので，普通は外心を O にとると垂心が $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と表されることから証明しますが。
外心を O として $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ として $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}},\cdots$ を示す。
$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\vec{h}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\left(\vec{c}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2=0$
$\vec{h}=3\vec{g}$
これはどこにでもありますね。
ここでも使っているファンクション・ビューでは，作者に聞いたところ，重心・内心・傍心はこの公式どおりで作成し，垂心を位置ベクトルで計算し，外心はオイラー線の性質を使い垂心重心から求めるんだそうだ。へー。

　さて，ネットは数学についても凄い状態で，調べてみるといくらでもある。
垂心・外心は辺の長さに直す（計算はこっちのほうがいいだろうが）より，角のほうがわかりやすい。
垂心は
$m=b\cos A\cos C,n=c\cos A\cos B,l=a\cos B\cos C$ とおけばよく

$$\vec{h}=\frac{a\cos B\cos C\vec{a}+b\cos C\cos A\vec{b}+c\cos A\cos B\vec{c}}{a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B}=\frac{\dfrac{a}{\cos A}\vec{a}+\dfrac{b}{\cos B}\vec{b}+\dfrac{c}{\cos C}\vec{c}}{\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}}$$

$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C(R$ は外接円の半径$)$ より下の公式が成立。
外心は
$m=b^2(a^2-b^2+c^2)=b^22ac\cos B,n=c^2(a^2+b^2-c^2)=c^22ab\cos C,l=a^2(-a^2+b^2+c^2)=a^22bc\cos A$

$$\vec{e}=\frac{a^22bc\cos A\vec{a}+b^22ca\cos B\vec{b}+c^22ab\cos C\vec{c}}{a^22bc\cos A\vec{a}+b^22ca\cos B\vec{b}+c^22ab\cos C\vec{c}}=\frac{a\cos A\vec{a}+b\cos B\vec{b}+c\cos C\vec{c}}{a\cos A\vec{a}+b\cos B\vec{b}+c\cos C\vec{c}}$$

上と同様にすると，下の公式が成立。
これは，面積座標の考え方（ $l:m:n=\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB$ ）を使うとすぐで，
$l:m:n=\dfrac{1}{2}R^2\sin 2A:\dfrac{1}{2}R^2\sin 2B:\dfrac{1}{2}R^2\sin 2C=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

$$\vec{h}=\frac{\tan A\vec{a}+\tan B\vec{b}+\tan C\vec{c}}{\tan A+\tan B+\tan C}\qquad\qquad \vec{e}=\frac{\sin 2A\vec{a}+\sin 2B\vec{b}+\sin 2C\vec{c}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

重心と内心と傍心は辺の長さが合っていて，垂心と外心は角の大きさが合っている，ということかな。

ここで入試問題から

'14 信大医学科後期

△ ABC において BC=a,CA=b,AB=c とおく。また，の外心を O，内心を I とおき，外接円の半径を R とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$ を示せ。

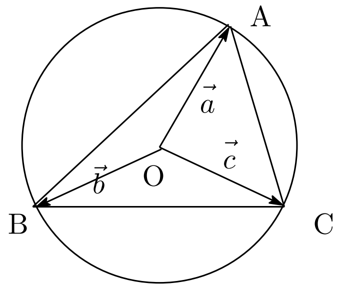
(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c}$ を示せ。

解)

(1) は前を見てもらって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 = \left|\dfrac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c}\right|^2$

$(a+b+c)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 = a^2R^2 + b^2R^2 + c^2R^2 + 2(ab\vec{a}\cdot\vec{b} + bc\vec{b}\cdot\vec{c} + ca\vec{c}\cdot\vec{a})$



ところで,

円周角と中心角の関係と

2 倍角の公式と

正弦定理により

$\vec{a}\cdot\vec{b} = R^2\cdot\cos 2C = R^2(1 - 2\sin^2 C)$

$= R^2\left\{1 - 2\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2\right\} = R^2 - \dfrac{c^2}{2}$

よって $(a+b+c)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 = R^2(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) - (abc^2 + bca^2 + cab^2)$

$= R^2(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)$

問題はこれまでだが,

さらに △ ABC= S, 内接円の半径を r とすると $S = \dfrac{r}{2}(a+b+c) = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2R} = \dfrac{abc}{4R}$

よって，$\dfrac{abc}{a+b+c} = 2rR$ であることに注意すると

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 = R^2 - 2rR$

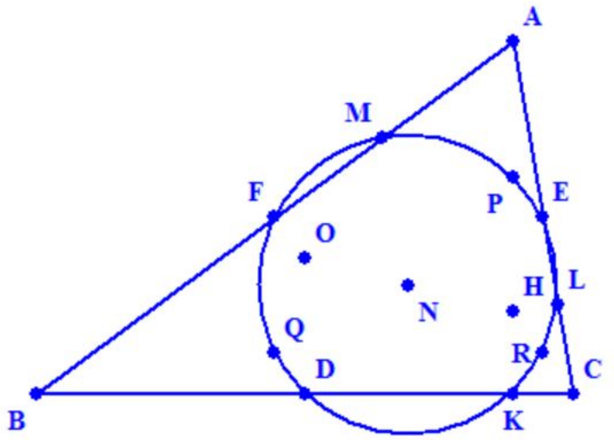
初等幾何の本ではこっちの形が出ているほうが多いかな。**内心と外心の距離**を内接円の半径と外接円の半径で表す。

　さて，これで終わりだともったいないんだな。

この公式は，九点円と内接円が接する（**フォイエルバッハの定理**）という証明に使える，というか使うためのものじゃないか。

小平邦彦の「幾何のおもしろさ」という本は，この証明が最後。もちろん初等幾何でやってある。で，彼の「幾何への誘い」ではこれの証明を複素数でやってある。高校生がやる幾何は 4 通りある。初等幾何，座標平面を使った解析幾何，ベクトル幾何，複素平面幾何。ベクトルで五心をまとめてきたので，最後にベクトルでファイエルバッハの定理を証明しよう。これはあまり見かけない。

各辺の中点（図の D,E,F）と各頂点から対辺におろした垂線の足（K,L,M）と，
AH,BH,CH の中点（P,Q,R）は同一円周（これが**九点円**）上にある。



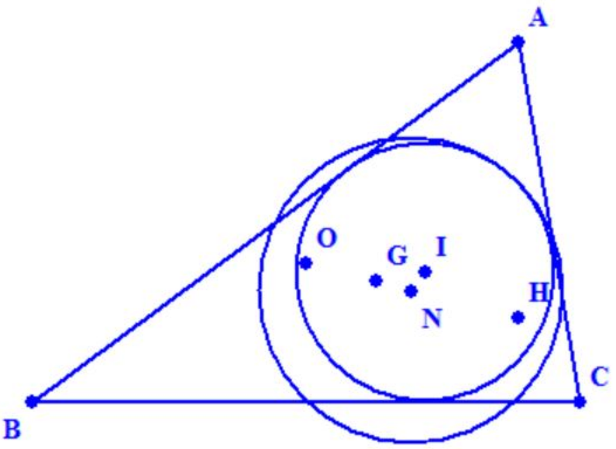
面倒くさそうで敬遠してきたけれど，
ここまでくれば，納得ですよ。
D,K から等距離にあるなど考えれば，
OH の中点が N（九点円の中心）でしょ。

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ND}}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\left|\frac{\vec{a}}{2}\right|=\frac{R}{2}=NK$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{NP}}\right|=\left|\frac{\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\left|\frac{\vec{a}}{2}\right|=\frac{R}{2}$$

フォイエルバッハの定理　内接円と九点円は接する



$\left|\overrightarrow{\mathrm{IN}}\right|^2=\left(\dfrac{R}{2}-r\right)^2$ をいえばいい。

(左辺)$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

で，外心と内心の距離が使える。後は計算。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2=R^2-2rR$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|^2$$

$$=\frac{3R^2}{4}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}}{2}$$

$$=\frac{3R^2}{4}+\frac{3R^2}{2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

$$2\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{a+b+c}(a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{a+b+c}\{(a+b+c)R^2+(a+b)\vec{a}\cdot\vec{b}+(b+c)\vec{b}\cdot\vec{c}+(c+a)\vec{c}\cdot\vec{a})\}$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left\{3(a+b+c)R^2-\frac{(a+b)c^2+(b+c)a^2+(c+a)b^2}{2})\right\}=3R^2-\frac{(a+b)c^2+(b+c)a^2+(c+a)b^2}{2(a+b+c)}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2=\frac{R^2}{4}-2rR-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}+\frac{(a+b)c^2+(b+c)a^2+(c+a)b^2}{2(a+b+c)}$$

$$=\frac{R^2}{4}-rR-rR-\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-2(a+b)c^2-2(b+c)a^2-2(c+a)b^2}{4(a+b+c)}$$

$$=\frac{R^2}{4}-rR-\frac{abc}{2(a+b+c)}-\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-2(a+b)c^2-2(b+c)a^2-2(c+a)b^2}{4(a+b+c)}$$

$$=\frac{R^2}{4}-rR-\frac{2abc+(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-2(a+b)c^2-2(b+c)a^2-2(c+a)b^2}{4(a+b+c)}$$

$=\dfrac{R^2}{4}-rR-\dfrac{(a-b-c)(-a+b-c)(-a-b+c)}{4(a+b+c)}$（この因数分解は嬉しかったな）

ここで，$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=\dfrac{a+b+c}{2}\dfrac{b+c-a}{2}\dfrac{c+a-b}{2}\dfrac{a+b-c}{2}$

$=-\dfrac{1}{16}(a+b+c)(-b-c+a)(-c-a+b)(-a-b+c)$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2=\frac{R^2}{4}-rR+\frac{16S^2}{4(a+b+c)^2}=\frac{R^2}{4}-rR+r^2\qquad\left(\because S=\frac{r}{2}(a+b+c)\right)$$

宮沢賢治が好きだったという，ヘロンの公式がポイントになって終わるのだった。