再読「代数学講義」

再読「高木貞治」シリーズ最後。

代數學講義　再読１

この本だけ持ってなかったのです。今買うととても高い（6,000 円近くする,「初等整数論講義」も高いので簡単に生徒に勧められない,「初等整数論講義」は廉価版が出てもいいと思うがなあ）ので，ネットの「日本の古本屋」から仕入れました。900 円くらいだったので，喜んで買ったのです。なんと，昭和 21 年の本です。私より古い。「代数学」は「代數學」だし，本文はカタカナ書きです。ネットのショッピングは便利だけど中が見えないからな,「こんなもん売るなよな」といたく感じたのですが，そういえば高木貞治さんは「数学書はカタカナ書きが一番」といってたのを思い出し調べてみると確かにありました。

「行く行くは科学書などはすべてカタカナ横書きになるときが必ず来ると思っている。」

ついでにもう一つ、「日本流なら４桁毎にコンマを打つべきです。」「数学の自由性」

漢字自体も，実は私は白川静のファンです（このノートパソコンには「字通」が入ってます）ので「數」も「数」では感じ（漢字）が出ないと前から思っていたのです。確か漢字源では「女と女を串刺しにして数珠つなぎにした象形」とありますが，白川さんによると,「婁は女子の髪を高く結（ゆ）いあげた形。これに攴を加えて，髪を乱すことを數（さく）という。数々として髪が乱れる意。女子を責めるときにその髪をうって乱したので責めることをいい，乱れてばらばらになるので数多い意となり，計数の意となる。」数学で女子生徒を責めてはいけませんよ。

前置きが長くなりましたが,「代数学講義」です。中身は複素数の幾何学から始まって，代数学の基本定理（ n 次方程式の n 個の解の存在），そして行列まで。今の複素数平面がない教育課程の高校生にはあまり縁がないかもしれませんが，まあ遊んでみましょう。

第一章　複素数

複素数平面の高校教育課程復活を待つばかりですねえ。

「実数は数学の対象としては不自然に偏狭で複素数の範囲においてのみ数学の諧調的，統一的の発達の可能であることが認められて，今日の数学は複素数の数学となったのである。」

「複素数の立場から考察するとき … 恰も上空から瞰下（かんか）するとき，地上の光景が明快に観取せられるようなものである。」

そうだ，そうだと思いながら今のところ通過して

第二章　方程式論の基本定理

二項係数を $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ と書くのはドイツ式だったのか。${}_n\mathrm{C}_k$ だと「肝心の n や k が目立たないのを嫌う」のでドイツ式を使うとある。なるほど。

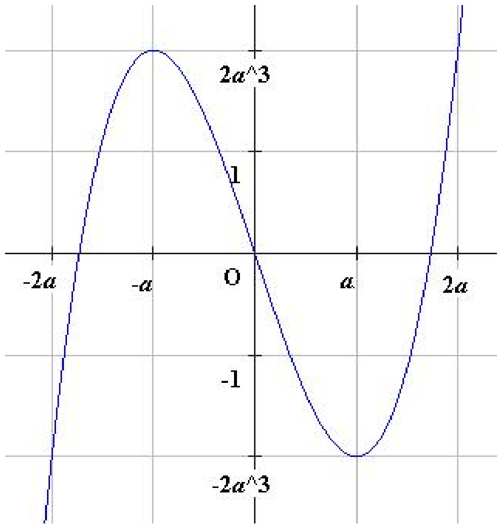
微分によらずして導関数を導くとしてテーラー展開がある。ニュートンも微分は二項係数の研究からやったとどこかで読んだ気がするが，こういうことか。

具体的に使えそうなものは

例えば $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ という関数を考える。
「概論」で説明したように連続組み立て除法をする。
で，$f(x)=(x-1)^3-12(x-1)-1$ と展開される。
話は変わりますけど,「emath」のマクロってすごいですね。
右の計算は TeX がやってくれてます。
$-1=f(1), -12=f'(2), 0=\dfrac{f''(2)}{2}$ というわけだ。

1	1	-3	-9	10
		1	-2	-11
1	1	-2	-11	-1
		1	-1	
1	1	-1	-12	
		1		
	1	0		

ついでに，高校生のために３次関数のグラフを考えると，
$y=f(x)$ は $y=x^3-12x$ を x 軸方向に１，y 軸方向に-1 平行移動したもの。
もっとついでに３次関数のグラフを調べると，$y=x^3-3a^2x$ のグラフを標準形などどいってきっちり覚えておいて，こいつに $a=2$ としてかけばおしまい。
これは結構いい方法です。微分も増減表も書かないのだ。
解析を使わない，まさに「代数学」。



上で何故１のまわりの展開（$x-1$ で割る）をするのか，という疑問が出ますよね。それが実は**変曲点**，2 回微分して 0 になるところ ($f''(x)=6x-6=0$) 。なんだやっぱり微分を使うのか，と言われるのもなんなので，純代数的にやれば以下のようになる。
$x^2+ax=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$ が平方完成，まねして
$x^3+ax^2=\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^3-3\left(\dfrac{a}{3}\right)^2x-\left(\dfrac{a}{3}\right)^3$ 名付けて「立方完成」，この $-\dfrac{a}{3}$ が変曲点。
理系ではもちろん変曲点ですが，文系では数 III までやらないので，**３次関数のヘソ**と言ってます。

例えば，教科書にある問題をヘソを使って解いてみますと
例１　$x=2$ で極小値 3 をとり，$x=4$ で極大値 5 をとる３次関数 $f(x)$ を求めよ。
解）$(2,3),(4,5)$ の中点 $(3,4)$ がヘソ，で $a=1$ 極大値とヘソの間は $2a^3=2$ のはずが，実際は１で３乗の係数は負なので $y=-\dfrac{1}{2}\{(x-3)^3+3(x-3)\}+4=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{9}{2}x^2-12x+13$
例２　３次関数 $f(x)=x^3-3mx^2-9m^2x$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとき，$f(\alpha)-f(\beta)=64\sqrt{2}$ を満たす正の定数 m の値を求めよ。
解）立方完成して $(x-m)^3-12m^2x$ ヘソは $x=m$ だから，$a=2m$，極大値と極小値の差は $4a^3=32m^3=64\sqrt{2}$ なので $m=\sqrt{2}$
例３　曲線 $y=x^2-5$ 上の点 $(2,3)$ における接線が，この曲線と交わるもう一つの点の x 座標を求めよ。
解）$y''=6x$ よりヘソの x 座標は 0。$x=2$ における接線が曲線と交わるもう一つの点の x 座標は $a=2$ で $-2a$ として -4。
どうです？**ヘソ**が**クセ**になりそうでしょ？

代數學講義　再読２　有理関数と部分分数

整式が数と同じに割り算ができるとか最大公約数を持つとかはもっと後に出てきますが，割り算をすれば分子の次数を分母の次数より低くすることができる（帯分数 mixed fraction）。 $f(x)$ と $g(x)$ が互いに素なら $a(x), b(x)$ が存在して $a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$ となる。とすれば，両辺を $f(x)g(x)$ で割って $\dfrac{a(x)}{g(x)}+\dfrac{b(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{f(x)g(x)}$ （部分分数 partial fractions)。これで，分数関数の積分ができる。

微分を使った部分分数に展開する方法が書いてある。高校生用に書き直してみると，

$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ のとき，$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sum\limits_i \dfrac{f(x_i)}{g'(x_i)}\dfrac{1}{x-x_i}$

何故なら，分母 $g(x)$ は部分分数に分かれて，$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sum\limits_i \dfrac{A_i}{x-x_i}$ となり，この A_i を決めればいい。

両辺に $g(x)$ をかけて，$\sum\limits_i \dfrac{g(x)}{x-x_i}A_i=f(x)$ より $\sum\limits_i (x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)A_i=f(x)$

x に x_i を代入して $(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)A_i=f(x_i)$

よって，$A_i=\dfrac{f(x_i)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

ここで $g'(x)=(x-x_2)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

$g'(x_i)=(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_n)+(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_n)+(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{n-1})$ なので

$A_i=\dfrac{f(x_i)}{g'(x_i)}$

二つくらいなら高校の教科書にあるように恒等式の方法でやったほうが楽だろうが，

$\dfrac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}=\dfrac{f(x_1)}{x_1-x_2}\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{f(x_2)}{x_2-x_1}\dfrac{1}{x-x_2}$

これがもっと使えそうなのは，この両辺に $(x-x_1)(x-x_2)$ をかけて，

$f(x)=\dfrac{f(x_1)}{x_1-x_2}(x-x_2)+\dfrac{f(x_2)}{x_2-x_1}(x-x_1)$ これが**ラグランジュの補間式**といわれるもの。

三つの補間式つまり３点を通る二次関数を求めるには，

$f(x)=\dfrac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}(x-x_2)(x-x_3)+\dfrac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}(x-x_1)(x-x_3)+\dfrac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}(x-x_1)(x-x_2)$ 数□の教科書のように連立方程式を解くよりは意味が分かる。

x_1, x_2, x_3 を a, b, c になおすとどこかで見た式が出て来る。

$f(x)=\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c)+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$

$f(x)$ を $1, x, x^2$ として両辺の x^2 の係数を比べると

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}=\begin{cases}0\cdots n=0\\ 0\cdots n=1\\ 1\cdots n=2\end{cases}$$

分数式の計算問題としてよく出て来る **Euler の分数式**ですよ。なんでこんなものを計算したのかと思ってはいましたが，ここで出てくると納得しますね。ちなみに, 分子が 2 次式のときのみ値が 0 でなく

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$$

$$\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}=-1$$

3 次式だと答は 1 次式になるはずで

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$$

Maxima にやらせると

```
for n:1 thru 5 do print(factor(ratsimp(a^n/(a-b)/(a-c)+b^n/(b-a)/(b-c)+c^n/(c-a)/(c-b))))
```

0

1

```
c+b+a

c^2+b*c+a*c+b^2+a*b+a^2

c^3+b*c^2+a*c^2+b^2*c+a*b*c+a^2*c+b^3+a*b^2+a^2*b+a^3
```

代數學講義　再読３　相加相乗平均

第３章で実数解の話もありますが、先ず先を急ぎましょう。ロルの定理から平均値の定理は解析だよなあ。途中ですごい式が出てます。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ が正数のとき

$m_1 = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, m_2 = \sqrt{\dfrac{x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n}{\dbinom{n}{2}}}, \cdots, m_k = \sqrt[k]{\dfrac{x_1x_2\cdots x_k+\cdots}{\dbinom{n}{k}}},$

$\cdots, m_n = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ のとき

$m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots m_k \geqq \cdots \geqq m_n$ どこでも等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

最初と最後が**相加相乗平均**。３つの場合でもう一回書くと

$m_1 = \dfrac{a+b+c}{3} \geqq m_2 = \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}} \geqq m_3 = \sqrt[3]{abc}$

「これを証明せよ」ってのは高校生にとってはいい問題になりますが，本の証明はなかなかです。

$(x-ay)(x-by)(x-cy) = x^3-(a+b+c)x^2y+(ab+bc+ca)xy^2-abcy^3 = x^3-3m_1x^2y+3m_2^2xy^2-m_3^3 = 0$

はすべて正の解なので，偏微分も入れて，微分したものも正の解を持つ（ここらへんがこの章の内容なんですが）ので，$3x^2-6m_1xy+3m_2^2y^2=0, -3m_1x^2+6m_2^2xy-3m_3^3y^2=0$

つまり $x^2-2m_1xy+m_2^2y^2=0, m_1x^2-2m_2^2xy+m_3^3y^2=0$ の判別式は０以上。

$m_1^2 \geqq m_2^2, m_2^4 \geqq m_1m3^3$ よって $m_1 \geqq m_2, \left(\dfrac{m_2}{m_3}\right)^3 \geqq \dfrac{m_1}{m_2}$ で証明できたと。素晴らしい。

「天下り」ってやつをなるたけしたくない私にとって，この証明はコーシーシュワルツの不等式の証明を思い出させます。 t を実数として

$|\,t(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\,|^2 \geqq 0$ だから $|\,(tx_1-y_1, tx_2-y_2)\,|^2 \geqq 0$ よって $(x_1^2+x_2^2)t^2-2(x_1y_1+x_2y_2)t+y_1^2+y_2^2 \geqq 0$

これから $(x_1y_1+x_2y_2)^2 \leqq (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$ ベクトルの内積を使うのがいいと思いますが，次のような問題もあるしなあ。

志賀医大　$f(x), g(x)$ を多項式とするとき, 次のことを証明せよ。

(1) $\left\{\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \displaystyle\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx \int_0^1 \{g(x)\}^2\,dx$

解）$\displaystyle\int_0^1 \{tf(x)+g(x)\}^2\,dx \geqq 0$ を使う。

ここで強調したいのは，２次関数や３次関数の最大最小問題はこの相加相乗でも解けることがあるということ。

例１　雨樋の問題　幅 10cm のブリキの板を両側から同じだけ折って断面が長方形の雨どいを作る。最もよく流れるのは何 cm 折ったときか。

解）折る長さを xcm とすると断面積 Scm^2 は $x(10-2x)$ なので <u>平方完成しないで</u>

$2S = 2x(10-2x) \leqq \left(\dfrac{2x+10-2x}{2}\right)^2 = 2\cdot\dfrac{25}{2}$ 等号は $x = \dfrac{5}{2}cm$ のときなのでこれが答。

例２　箱の問題　幅 10cm の正方形の四隅から正方形を切り取り，ふたなしの箱を作る。容量が最も大きくなるのは何 cm 切り取ったときか。

解）切り取る正方形の一辺の長さを xcm とすると体積 Vcm^3 は $x(10-2x)^2$ なので <u>微分しないで</u>

$4V = 4x(10-2x)^2 \leqq \left(\dfrac{4x+10-2x+10-2x}{3}\right)^3 = 4\cdot\dfrac{200}{27}$ 等号は $x = \dfrac{5}{3}cm$ のときなのでこれが答。

平方完成しないで，微分しないで，というわけで「代数学講義」

代數學講義　再読４　ニュートン法

$f''(x)>0$（下に凸）なる区間で $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ とすると

この数列 $\{a_n\}$ の極限は $f(x)=0$ の解である。

これは，$y=f'(a_n)(x-a_n)+f(a_n)$ なる接線と x 軸との交点の x 座標で近似していくということである。

ところで，昔は接線を切線と書いていたのかな？広辞苑でも切線と接線は同じとしている。

入試問題から拾おう。

'05 群馬大学　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n^2+9}{8a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$0<a_{n+1}-\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{3}\left(a_n-\dfrac{3}{2}\right)^2$ を証明せよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

実はこれ，$4x^2-9=0$ の $x=2$ からの近似解です。

$a_{n+1}=a_n-\dfrac{4a_n^2-9}{8a_n}=\dfrac{4a_n^2+9}{8a_n}$ ね。元は Newton 法なんですね。

極限値 $\dfrac{3}{2}$ は $x=\dfrac{4x^2+9}{8x}$ として出せるし，$\dfrac{4a_n^2+9}{8a_n}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{9}{8a_n}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a_n}{2}\dfrac{9}{8a_n}}=\dfrac{3}{2}$ でも。

もっと簡単なものを示しておきましょう。

$\sqrt{2}$ の Newton 近似は，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{a_n^2-2}{2a_n}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a_n}{2}\dfrac{1}{a_n}}=\sqrt{2}$

Maxima で実験すると結構収束は速い。

```
a:2;
for i:1 thru 6 do (a:a/2+1/a,print(float(a)));
1.5
1.416666666666667
1.41421568627451
1.41421356237469
1.414213562373095
1.414213562373095
```

$\sqrt[3]{2}$ の Newton 近似は，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{a_n^3-2}{3a_n^2}=\dfrac{2a_n}{3}+\dfrac{2}{3a_n^2}$

```
a:2;
for i:1 thru 7 do (a:2*a/3+2/a^2/3,print(float(a)));
1.5
1.296296296296296
1.260932224741749
1.259921860565926
1.259921049895395
1.259921049894873
1.259921049894873
```

なるほど。

代數學講義　再読５　多項式　既約性の判定

$n+1$ 個の値で値が等しい n 次多項式は等しい。（等しくなければ二つの多項式の差は n 次式なのに $n+1$ の解があることになりおかしい ）

定数は０次の多項式とする。（最高次数の項が 0 でないとしたいので，0 は次数なしの多項式とした方が都合がよいとある）

多項式の集合でも，ユークリッドの互除法，最大公約数の存在， f_1, f_2 が互いに素なときは $f_1 p + f_2 Q = 1$ なる多項式 P, Q の存在は整数の集合と同じ，整式の名の通り。

有理係数で可約ならば，整数係数で可約（係数に公約数をもたないものを**原始多項式**という）。

等の説明があって，**Eisenstein の既約判定**がくる。最高次数の係数を除いた係数はすべて素数 p で割り切れて，定数項が p^2 で割り切れない多項式は既約である。

こんなものも，入試問題にはありますね。

'96 京大　n は 2 以上の自然数,p は素数,a_0,$a_1, \cdots, a_{n-1}$ は整数とし,

n 次式 $f(x) = x^n + pa_{n-1}x^{n-1} + \cdots + pa_i x^i + \cdots + pa_0$ を考える。

(1)　方程式 $f(x) = 0$ が整数解 α をもてば，α は p で割り切れることを示せ。

(2)　a_0 が p で割り切れなければ，方程式 $f(x) = 0$ は整数解をもたないことを示せ。

解）(2) $f(x) = 0$ が整数解をもつとして a_0 が p で割り切れることをいって，対偶です。

この既約判定はそっけない記述ですが，私が（ずっと昔）勉強したファン・デル・ヴェルデンの「現代代数学」には例がしっかりあります。

例１　p 素数のとき，$x^m - p$ （確かにこれも条件を満たしている）は既約。つまり，$\sqrt[m]{p}$ **は無理数**。

例２　p 素数のとき，**円周等分方程式** $x^p - 1 = 0$ を因数分解した $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ は既約である。

例３　$f(x) = x^2 + 1$ は既約である。

例２例３は条件を満たしていませんよね。次のような巧妙な手法です。

$f(x)$ が可約なら，$f(x+1)$ も可約。

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = \frac{x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}x}{x} = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}$$

これで，条件を満たすので既約。

例３も同様。$f(x+1) = x^2 + 2x + 2$

この判定条件は高校の範囲でも，結構使えます。

同好会で円周等分方程式の因数分解をできるだけやってみました。Maxima で実験。

```
for p:1 thru 16 do print(p,factor(x^p-1));
```

```
1 x-1
2 (x-1)*(x+1)
3 (x-1)*(x^2+x+1)
4 (x-1)*(x+1)*(x^2+1)
5 (x-1)*(x^4+x^3+x^2+x+1)
6 (x-1)*(x+1)*(x^2-x+1)*(x^2+x+1)
7 (x-1)*(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)
8 (x-1)*(x+1)*(x^2+1)*(x^4+1)
9 (x-1)*(x^2+x+1)*(x^6+x^3+1)
10 (x-1)*(x+1)*(x^4-x^3+x^2-x+1)*(x^4+x^3+x^2+x+1)
11 (x-1)*(x^10+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)
12 (x-1)*(x+1)*(x^2+1)*(x^2-x+1)*(x^2+x+1)*(x^4-x^2+1)
13 (x-1)*(x^12+x^11+x^10+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)
14 (x-1)*(x+1)*(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)*(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)
15 (x-1)*(x^2+x+1)*(x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)
16 (x-1)*(x+1)*(x^2+1)*(x^4+1)*(x^8+1)
```

法則つかめます？
p が素数，2^n は分かりますね。$2\times$ 素数も分かりそうだ。 p を素因数分解したものと関係があるんだろうか？円周上の複素数解を考えると当たり前のような気もするし，素数の巾が入るとちょっと複雑だ。
ここに出て来る，x^4+1, x^6+x^3+1 が既約であることを示せ，というのがヴェルデンの本の練習問題，やってみましょう。
ちょっと不思議な $x^4-x^2+1, x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$ の既約性はどうやるのだろう？剰余類を係数とする整式を考えるとか，Eisenstein の拡張もあるがかえって煩瑣かな。前の式は 1 次式は因数に持たないのは明らかなので（整数解は 1,-1 しかありえないがこれは解でない），2 次式に因数分解されたとして矛盾を示すとか。
x^4+x^2+1 は高校でも有名な因数分解。
ついでに，円周等分多項式＝0 の方程式を解いたけれども，それはまた後で。

代數學講義　再読６　対称式　３次方程式の判別式

対称式が基本対称式で表される証明があります。高校生はこの事実を使って問題を解くわけだ。実に色々なところで使われる。$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma$ で基本対称式 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ を決める。以下 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ とする。

この $f(x)$ を使ったやつをまず紹介しよう。

同次巾の和 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots x_n^k\quad(S_0=n)$ を次のように求めることができる。(Newton の公式といって東京書籍の教科書の指導書にも書いてある)

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{x_k}{x^2}+\dfrac{x_k^2}{x^3}+\cdots=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{x_k}{x}}=\dfrac{1}{x-x_k}$ これを k が 1 から n まで足し合わせて

$f'(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$ なので

$\dfrac{S_0}{x}+\dfrac{S_1}{x^2}+\dfrac{S_2}{x^3}+\cdots=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$　つまり $f(x)\left(\dfrac{S_0}{x}+\dfrac{S_1}{x^2}+\dfrac{S_2}{x^3}+\cdots\right)=f'(x)$

$(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\left(\dfrac{S_0}{x}+\dfrac{S_1}{x^2}+\dfrac{S_2}{x^3}+\cdots\right)=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ この両辺を比べたものが Newton の公式

$S_0=n,S_1+a_1S_0=a_1(n-1),S_2+a_1S_1+a_2S_0=a_2(n-2),S_3+a_1S_2+a_2S_1+a_3S_0=a_3(n-3),\cdots$

つまり $S_0=n,S_1+a_1=0,S_2+a_1S_1+2a_2=0,S_3+a_1S_2+a_2S_1+3a_3=0,\cdots$

$n=3$ でやってみると,$x_1+x_2+x_3=-a_1,x_1^2+x_2^2+x_3^2=a_1^2-2a_2,$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-a_1(a_1^2-2a_2)+a_2a_1-3a_3=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3,\cdots$

微分を使うのが苦しければ,次の漸化式でもいける。$x_1=a,x_2=b,x_3=c$ として

$S_n=S_{n-1}(a+b+c)-S_{n-2}(ab+bc+ca)+S_{n-3}abc\ (n\geqq 3)$

2 文字のときは

$S_n=S_{n-1}(a+b)-S_{n-2}ab\ (n\geqq 2)$

こっちのほうが覚えやすい。

さらに考えれば,2 項定理・多項定理の応用もある。

$a^n+b^n=(a+b)^n-{}_n\mathrm{C}_1ab(a^{n-2}b^{n-2})-\cdots$

例えば,$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a^2+b^2)-6a^2b^2$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-\dfrac{3!}{2!1!}(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)-\dfrac{3!}{1!1!1!}abc$

次に, 差積 $P=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_2-x_3)\cdots$ の２乗 $S=P^2$ は対称式なので基本対称式で表され, 解の基本対称式だから方程式の係数で表されるという, **判別式**を調べる。

まず２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α,β,$S=(\alpha-\beta)^2$ とすると,$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ つまり,$\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-4\dfrac{c}{a}$

よって,$a^2S=b^2-4ac$ で, これを D 判別式（重複解があるのと $D=0$ とが同値）という。

判別式は３次方程式でもあるんだろうなあと，以下それを高校生風に求めます。

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α,β,γ,$S=\{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}^2$ として, これを a,b,c,d で表せばいいのだ。この表し方が難しいので, 微分を使ってグラフを考えて示そう。高校生はこうやる。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ として,$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ の解を p,q とおくと,$p+q=-\dfrac{2b}{3a}$,$pq=\dfrac{c}{3a}$。

ここで p,q が実数であるためには，$b^2-3ac\geqq 0$ こいつを変形すると $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\geqq 0$ なる有名な不等式がでる。

で，$f(p)f(q)\leqq 0$ なる式を a,b,c に戻せばいい。といいながら，昔はこれを計算しましたが，今回は Maxima にやってもらいました。

$\dfrac{27a^2d^2+4b^3d-18abcd+4ac^3-b^2c^2}{27a^2}\leqq 0$ つまり，$(b^2-4ac)c^2-27a^2d^2-4b^3d+18abcd\geqq 0$

$d=0$ のときにちゃんと，$b^2-4ac\geqq 0$ が見えてますね。これを出して喜んでいましたが，この本にちゃんと書いてありました。もちろん，方法は代数的ですが。

例えばこうです。

方程式 $2x^3-3x^2+a=0$ の実数の解の個数は，a の値によってどう変わるか。

解）$-27\cdot 2^2a^2-4\cdot(-3)^3a\geqq 0$ つまり，$a(a-1)\leqq 0$ のとき実数解を持つ。

直接３次方程式の判別式を Maxima にやってもらうには

```
(y:solve(a*x^3+b*x^2+c*x+d=0,x),p:y[1],q:y[2],r:y[3],ratsimp((p-q)*(p-r)*(q-r))^2))


-(27*a^2*d^2+(4*b^3-18*a*b*c)*d+4*a*c^3-b^2*c^2)/a^4
```

solve は方程式を解く，それを リスト y に入れる，一つめの解を $p\cdots$ ，として，差積の２乗を計算し，分数の簡略化をする，という命令です。一つずつやったほうがいいですね。

これで，$p+q+r$ とか $p*q+q*r+r*p$ とか $p*q*r$ とか遊んでみてください。

これ以降の３次方程式，４次方程式の解の公式，５次以上の解の公式の存在しない証明とかさすがに多くの本にもありますのでここでは，さっきの３次方程式の解を一つ見てみます？

$$x=\left(-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{27\,a^2\,d^2+\left(4\,b^3-18\,a\,b\,c\right)\,d+4\,a\,c^3-b^2\,c^2}}{6\,\sqrt{3}\,a^2}-\frac{27\,a^2\,d-9\,a\,b\,c+2\,b^3}{54\,a^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$-\frac{\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(3\,a\,c-b^2\right)}{9\,a^2\left(\frac{\sqrt{27\,a^2\,d^2+\left(4\,b^3-18\,a\,b\,c\right)\,d+4\,a\,c^3-b^2\,c^2}}{6\,\sqrt{3}\,a^2}-\frac{27\,a^2\,d-9\,a\,b\,c+2\,b^3}{54\,a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}-\frac{b}{3\,a}$$

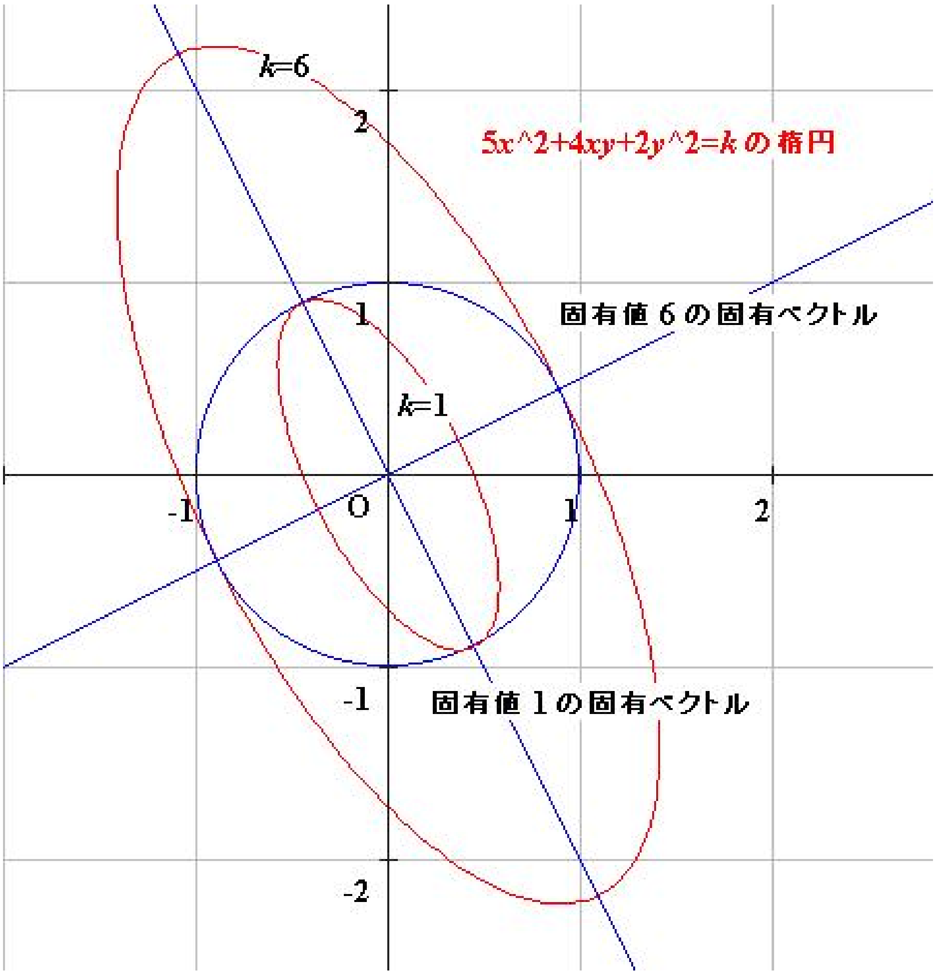
Maxima の答を TeX form で出力したものをそのまま入れてます。判別式が見えます，すごいですね。

「代数学講義」１回目は，ここまでかな。

代數學講義　再読７　二次形式　対称行列の固有値

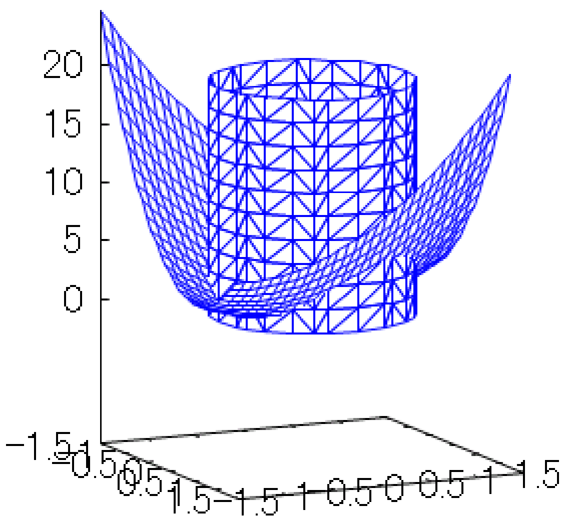
「代数学講義」は前回までがまず第一回にしようと思いましたが，最後のほうが二次形式の話なので，最近何回も解いているセンターの練習の問題をちょっと違ったやり方で解いてみましょう。

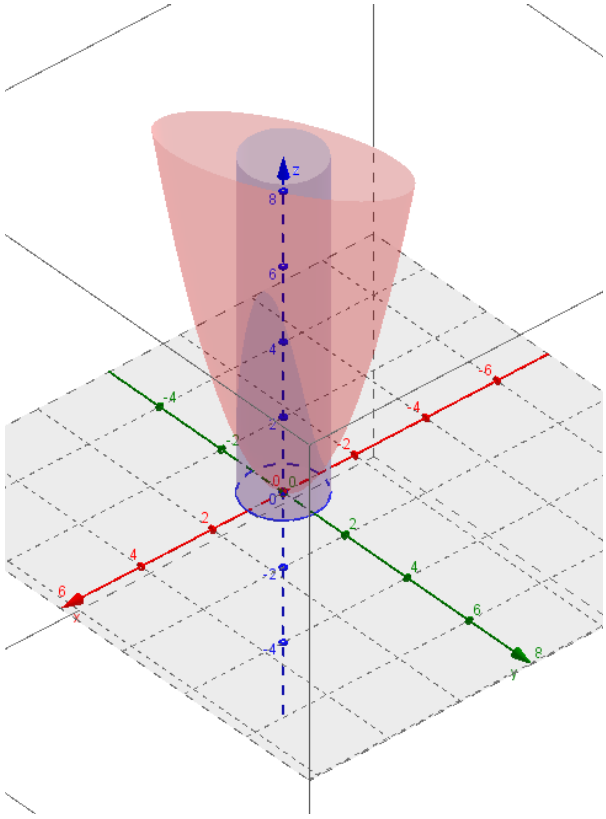
例えば「$5\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta$ の最大値を求めよ」なんてのが数 II にある。
これを三角関数を使わないで書くと,「$x^2+y^2=1$ のとき，$5x^2+4xy+2y^2$ の最大値を求めよ」となる。
この手の問題はどっちが先なんでしょうかね？三角関数のほうは倍角の公式で次数を落として合成して求める。
一方，変形して出した二次式を行列を使って表現すると，$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
さあ，これが対称行列なので，直行行列で対角化可能でそれは元の行列の固有値を対角成分にもつ。つまり，対角化した行列は $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ しかも，直角行列で変換したので距離不変。(x,y) が (X,Y) に変換されたとすると $x^2+y^2=1$ は $X^2+Y^2=1$ で，二次式は $6X^2+Y^2$。 この最大値は 6 最小値は 1 となる。
どうです？倍角の公式＆合成の公式を使うのと，行列の固有値を求めるのはどっちが楽かなあ？
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は $(5-\lambda)(2-\lambda)-4=0$ の解。
数 C までやったとして（回転は今の教育過程ではないが）線形計画法的にやれば，下の図のようになる。行列の固有ベクトルが見えますね。円をある方向に $\sqrt{6}$ 倍してあるわけだ。



幾何学的方法なら高校生でも，次のように線形計画法でできる。

円と等高線 $5x^2+4xy+2y^2=k$ （楕円らしい）が接するとき，つまり接線の傾きが等しくなればいいので，
接点の座標を (x_0,y_0) とおくとそれぞれの接線は $5x_0x+2(x_0y+xy_0)+2y_0y=k, x_0x+y_0y=1$
傾きが等しいとして $(5x_0+2y_0)y_0=2(x_0+y_0)x_0$ これから $y_0=-2x_0, y_0=\dfrac{1}{2}x_0$ が出る。





ちょっと3次元で見てみると，左が Maxima+gnuplot 右が Geogebra
Geogebra は3次元版がどうも不安定（'13年2月現在）でうまくいかない時がある。

どうです？確かに方法としては，解析的方法と代数的方法と幾何的方法の3種類の仕方があるでしょう？もっと楽な問題の例として，「$x^2+y^2=1$ のときの $x+y$ の最大値と最小値を求めよ」も上のように3種類ありますのでやってみましょう。