予備校でもミスするシリーズ　３

球の体積面積の等積変形は面白いものがあるが，体積も平行移動して計算を楽にやりたい。

関西　システム理工

a を正の定数とする。中心の座標が $(1, a, -a^2)$ の球面が xy 平面に接している。

(1) 球面の方程式を求めよ。

(2) この球面がさらに xz 平面と共有点をもつためのの a 値の範囲を求めよ。

(3) さらに平面との共有点の全体が半径 $\sqrt{2}$ の円になっているとする。

このときの球面の方程式を求め，その球の体積を求めよ。

また，この球が xz 平面で切り取られる小さい方の部分の体積を求めよ。

(1) 中心の z 座標の絶対値が半径になって $(x-1)^2+(y-a)^2+(z+a^2)^2=a^4$

(2) 中心の y 座標が半径より小さいので $a \geqq 1$

(3) $y=0$ とした円 $(x-1)^2+(z+a^2)^2=a^4-a^2=2$ から $a=\sqrt{2}$ で $(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2+(z+2)^2=4$

半径 2 の球の体積 $\dfrac{32}{3}\pi$

解答は最後の体積をミスってました。しばらくして治りましたが、すごい計算をしてます。

$\pi\displaystyle\int_{-2+\sqrt{2}}^{0}(-t^2+2\sqrt{2}t+2)dt=\frac{16-10\sqrt{2}}{3}\pi$

これは平行移動して $\pi\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}(4-y^2)dy$ で十分でしょう。あるいは $\dfrac{16}{3}\pi-\pi\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}}(4-y^2)dy$