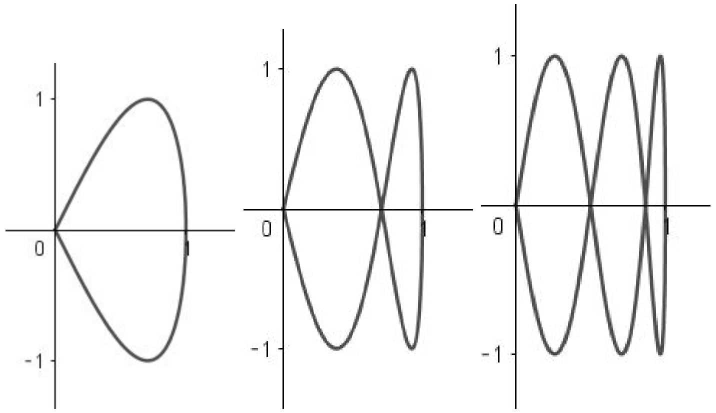
リサージュの面積

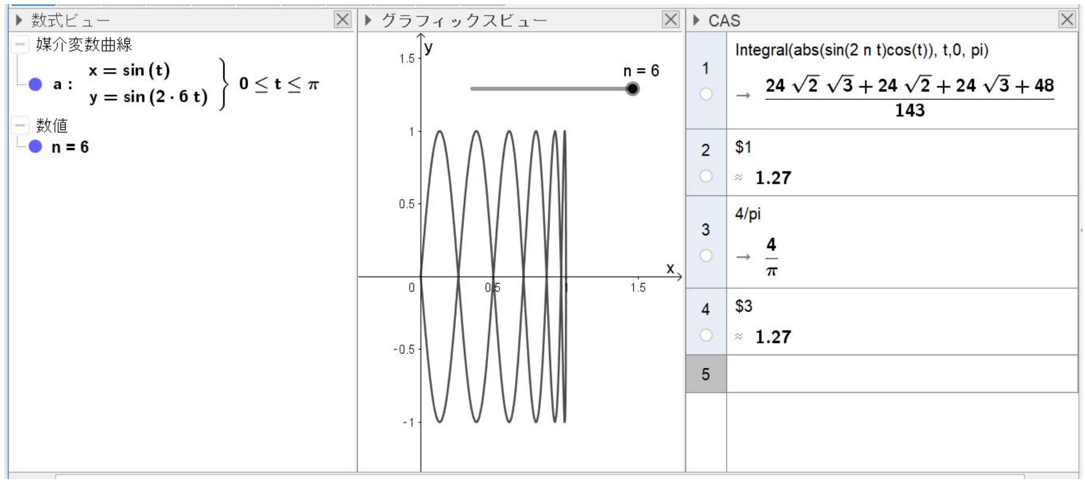
13 筑波
n は自然数とする。
(1)　$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して
$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt\cos t\,dt = (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
が成り立つことを示せ。
(2)　媒介変数 t によって $x=\sin t, y=\sin 2nt \quad (0\leqq t\leqq \pi)$
と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら
$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi = \frac12\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)\quad (n\geqq 2)$$
を用いてよい。
(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



(1)　求める積分を I として，部分積分をする。

$$I=\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt=\Big[\sin 2nt\sin t\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}-2n\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\cos 2nt\sin t\,dt=-2n\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\cos 2nt\sin t\,dt$$
$$=2n\Big[\cos 2nt\cos t\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}+4n^2\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt=2n\left(\cos k\pi\cos\tfrac{k}{2n}\pi-\cos(k-1)\pi\cos\tfrac{k-1}{2n}\pi\right)+4n^2I$$
$$=2n\left((-1)^k\cos\tfrac{k}{2n}\pi-(-1)^{k-1}\cos\tfrac{k-1}{2n}\pi\right)+4n^2I=2n\left((-1)^k\cos\tfrac{k}{2n}\pi+(-1)^k\cos\tfrac{k-1}{2n}\pi\right)+4n^2I$$
つまり，$(4n^2-1)I=2n\left((-1)^{k+1}\cos\tfrac{k}{2n}\pi+(-1)^{k+1}\cos\tfrac{k-1}{2n}\pi\right)+4n^2I$
よって，$I=(-1)^{k+1}\dfrac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\dfrac{k}{2n}\pi+\cos\dfrac{k-1}{2n}\pi\right)$

(2)　$$S_n=2\int_0^1|y|dx=2\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\right|dt=2\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
$$=\frac{4n}{4n^2-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)=\frac{4n}{4n^2-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi+1+\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi\right)$$
$$=\frac{4n}{4n^2-1}\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}=\frac{4n}{4n^2-1}\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}=\frac{4n}{4n^2-1}\frac{4n}{\pi}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cos\frac{\pi}{4n}=\frac{4}{4-\frac{1}{n^2}}\frac{4}{\pi}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cos\frac{\pi}{4n}$$
$\to\dfrac{4}{\pi}$ ($n\to\infty$ だから，$n\geqq 2$ としてもいい。ちなみに $S_1=\dfrac{4}{3}$ だから分母が π に近づくのか。)



必要なら使っていい公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi=\frac12\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)$　$(n\geqq 2)$　これも証明しとこう。
三角関数の区分求積法でたまに使う。
左辺の第 k 項を差の形に変形したいとみると，和積公式を使いたくなり，
$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{4n}=\frac12\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sin\frac{2k+1}{4n}\pi-\sin\frac{2k-1}{4n}\pi\right\}$$
$$=\frac12\left\{\sin\frac{3}{4n}\pi-\sin\frac{1}{4n}\pi+\sin\frac{5}{4n}\pi-\sin\frac{3}{4n}\pi+\cdots+\sin\frac{2n-1}{4n}\pi-\sin\frac{2n-3}{4n}\pi\right\}$$
$$=\frac12\left\{-\sin\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{2n-1}{4n}\pi\right\}=\frac12\left\{-\sin\frac{\pi}{4n}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)\right\}=\frac12\left(-\sin\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{\pi}{4n}\right)$$
$$=\frac12\sin\frac{\pi}{4n}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)$$
で，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi=\frac12\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)$
両辺に $\dfrac{\pi}{4n}$ をかけて，極限（$n\to\infty$）をとると，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4n}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}-1\right)\to 1$$
$y=\cos x$ の $x=0$ から $x=\dfrac{\pi}{2}$ までの面積が 1 であることの証明になっている。