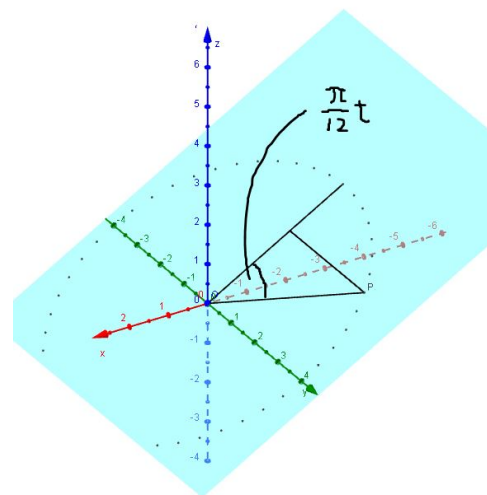


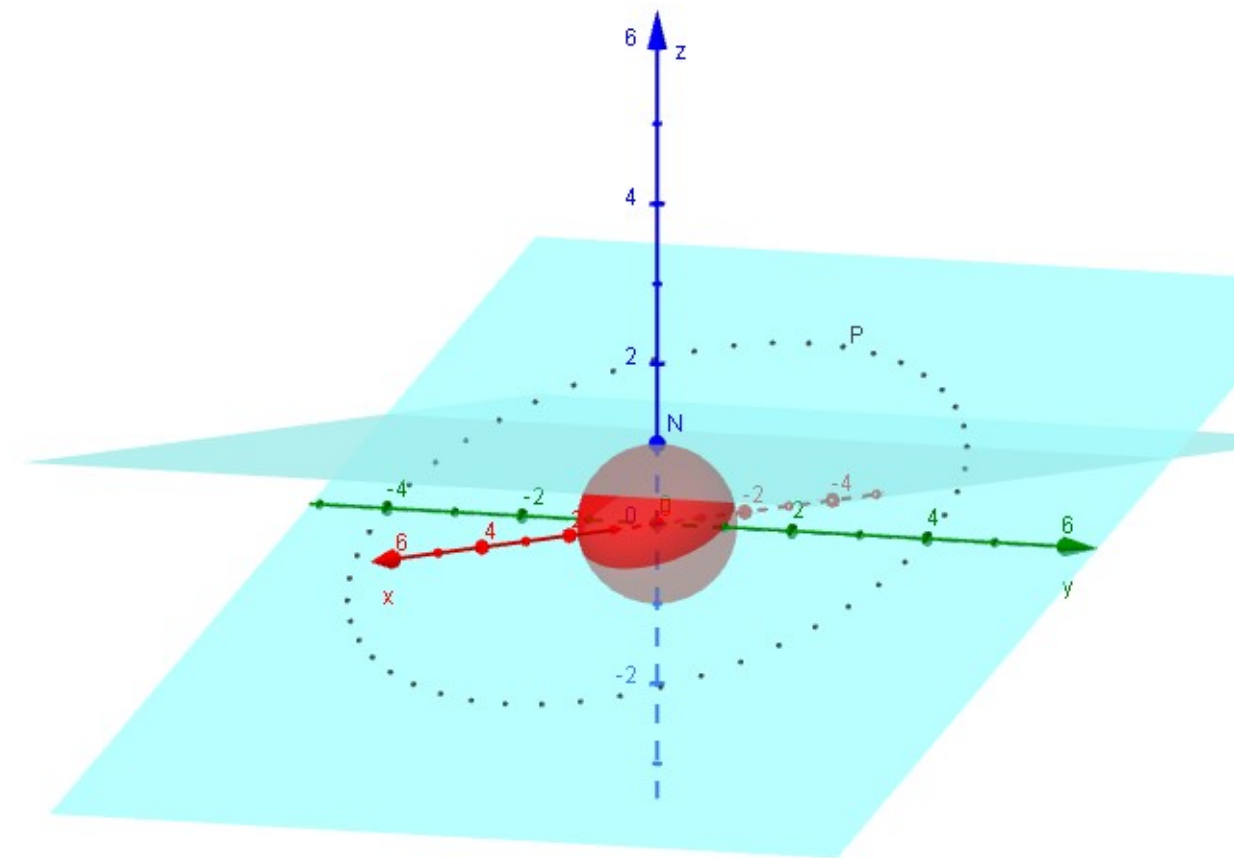
# 東大'73理1

'1973 東大理1 Sを中心O, 半径aの球面とし, NをS上の1点とする。点Oにおいて線分ONと $\frac{\pi}{3}$ の角度で交わる一つの平面の上で, 点Pが点Oを中心とする等速円運動をしている。その角速度は毎秒 $\frac{\pi}{12}$ であり, また $OP = 4a$ である。

点Nから点Pを観測するとき, Pは見え始めてから何秒間見え続けるか。またPが見え始めた時点から見えなくなる時点までの, NPの最大値および最小値を求めよ。ただし, 球面Sは不透明であるものとする。



Geogebra で P を見ようと思うと,  
 $P\left(-2\sqrt{3}a \cos \frac{\pi}{12}t, 4a \sin \pi 12t, 2a \cos \frac{\pi}{12}t\right)$   
 $-\pi \leq \frac{\pi}{12}t \leq \pi$  で十分, つまり  $-12 \leq t \leq 12$



Nでの接平面  $z = a$  より上が可視範囲。

$$2a \cos \frac{\pi}{12} \geq a \text{ より } \cos \frac{\pi}{12} \geq \frac{1}{2} \text{ つまり } -\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{12}t \leq \frac{\pi}{3}$$

$$-4 \leq t \leq 4 \text{ で見える時間は8秒。}$$

$$\text{また, } NP^2 = \left(-2\sqrt{3}a \cos \frac{\pi}{12}t\right)^2 + (4a \sin \pi 12t)^2 + \left(2a \cos \frac{\pi}{12}t - 1\right)^2$$

$$= 17a^2 - 4a^2 \cos \frac{\pi}{12}t \quad (-4 \leq t \leq 4)$$

よって NP の最小値  $\sqrt{13}a$ , 最大値  $\sqrt{15}a$

冬はオリオンが綺麗に見えるよなあ, と思いつつ。