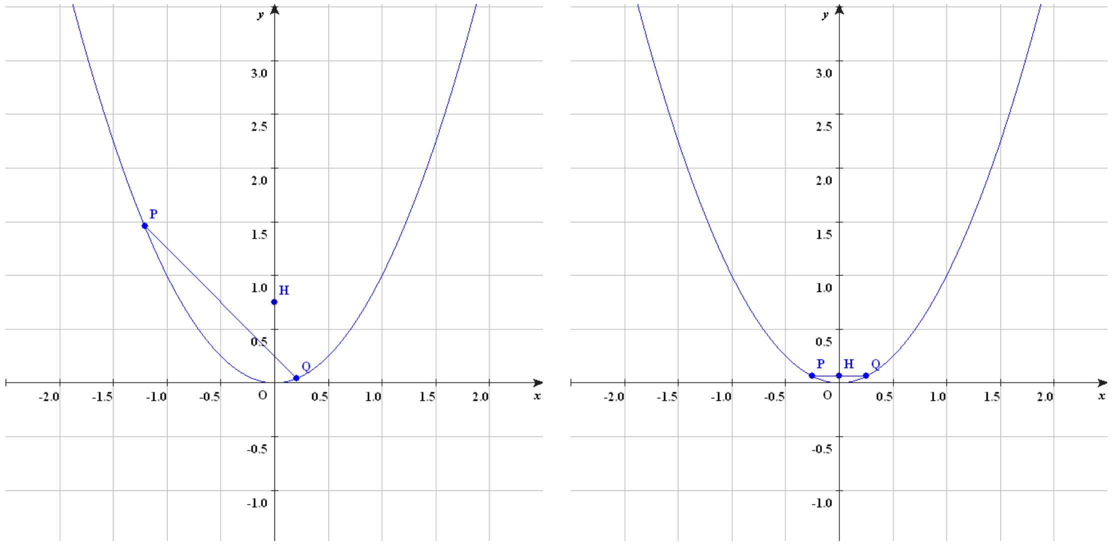
08 年東大理 4 番　放物線の場合分け

08 年 理 4　放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P,Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。
(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で h を表せ。
(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。

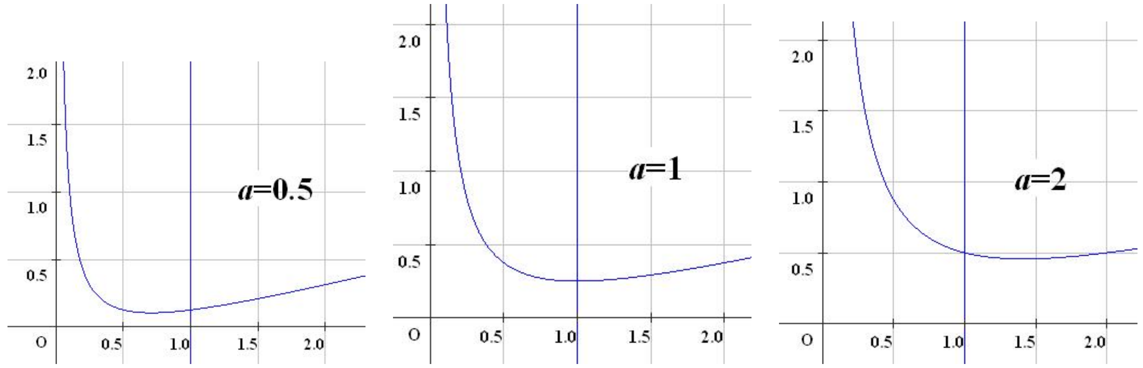
この問題，一番出来が良かったらしい。さもありなん。しかも，昭和 49 年度に同じようなものが出てますね。
昭和 49 年度 理文共通 2 番　長さ l の線分が，その両端を放物線 $y=x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし $l \geqq 1$ とする。

この手の問題は変数のとり方が大事なところだが，与えられた問題に沿うように $\mathrm{P}(p,p^2)$,$\mathrm{Q}(q,q^2)(p<q)$ とすれば，あまり考えずに，
$\dfrac{p^2+q^2}{2}=h, \dfrac{q^2-p^2}{q-p}=p+q=m, L^2=(1+m^2)(q-p)^2$
p,q を消去して，$L^2=(1+m^2)(4h-m^2)$ これを h について解いて，$h=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{L^2}{1+m^2}+m^2\right)$
$h=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{L^2}{1+m^2}+1+m^2-1\right) \geqq \dfrac{1}{4}\left(2\sqrt{\dfrac{L^2}{1+m^2}(1+m^2)}-1\right)=\dfrac{2L-1}{4}$
相加相乗平均の関係による。等号は $\dfrac{L^2}{1+m^2}=1+m^2$ より，$m=\pm\sqrt{L-1}$
おっと $L \geqq 1$ という条件がついてしまうじゃないか。
ならば最初から，$1+m^2=M$ とでもおいて，関数 $h=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{L^2}{M}+M-1\right)$
の最大最小を，$M(M \geqq 1)$ で微分して，L の値で場合分けして出すという普通の解答に落ち着く。



L の値によって最小を取る様子が違う。（左図は $L=2$，右図は $L=\dfrac{1}{2}$）これの違いが何故出るか，これが放物線の性質と何か関係があるのか，というのがこの問題をリクエストした人の聞きたかったところでしょう。

何故場合分けが必要になるのかは，結局，関数 $h=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{L^2}{M}+M-1\right)$ の極小値が区間に入るかどうかによる。



これが放物線の性質として何か関係があるのだろうか？ところで，放物線の場合分けというと，有名な次の問題が思い出される。

問題　点 $\mathrm{A}(0,a)$ と，放物線 C:$y=x^2$ がある。このとき，A から C 上の点に至る最短距離を求めよ。

$(0,a)$ と (x,x^2) との距離の 2 乗は $x^2+(x^2-a)^2=x^4-(2a-1)x^2+a^2=\left(x^2-\dfrac{2a-1}{2}\right)^2+\dfrac{4a-1}{4}$
ここで場合分けが必要になり（$x^2 \geqq 0$ より），
最小値は $a \geqq \dfrac{1}{2}$ とき，$\dfrac{\sqrt{4a-1}}{2}$，$a<\dfrac{1}{2}$ とき，$|a|$。

こっちの方は，原点での放物線の曲率半径が $\dfrac{1}{2}$ に関係しているんだろうが。
これじゃあリクエストに答えたことにならないかなあ？まあ，動いている図が結構面白かったのでこれで勘弁してもらって，

変形問題　長さ 1 の線分がその両端を $y=|x|$ 上にのせて動く。この線分の中点の軌跡を求めよ。