# 究極の偶関数・奇関数

不明な関数でその性質から色々の問題を解いたり関数自体を求めるという関数方程式というカテゴリーの問題。

(a) 任意の正の実数 $x$ について $f(x) > 0, g(x) > 0$

(b) 任意の実数 $x$ について $f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$

(c) 任意の実数 $x, y$ につてい $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$

(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 2$

微分可能で, 上の条件を満たしている関数を $f(x), g(x)$ として以下求めよ。

(1) $f(0), g(0)$

(2) $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$

(3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - f(x)}{x^2}$

(4) $f'(x)$ を $g(x)$ で表す。

(5) 曲線 $f(x)g(x)$ , 直線 $x = a\,(a > 0)$ および $x$ 軸で囲まれる図形の面積が 1 のときの, $f(a)$

普通の解答はまあどこかで見てもらうとしてこれが, どんな関数か考えてみよう。実はこれ有名なもの。

(b) は $f$ が偶関数,$g$ が奇関数といっている。

(c) もどこかで見たぞ。

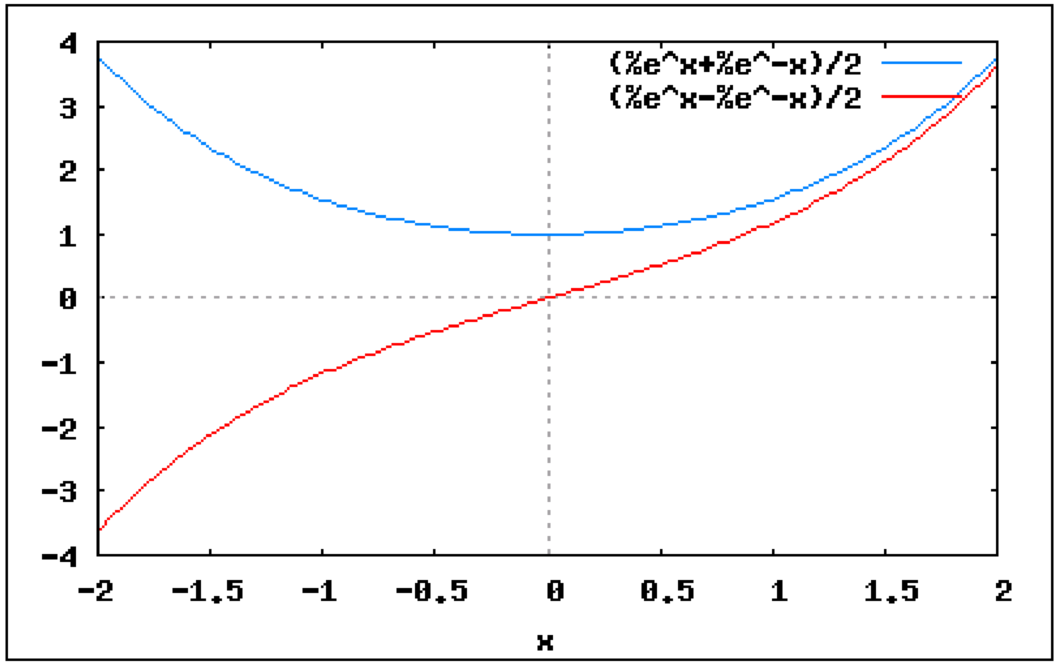
(d) は $g$ の原点における傾きが 2 ということ。

2 つの関数があって, 偶関数と奇関数とくれば $\cos x$ と $\sin x$ が頭に浮かぶでしょう。しかも (c) は加法定理じゃあないか。

しかし, (a) が合わずに,$f$ が $\cos x$ とすると (c) の加法定理の符号が逆だ。

「再読・解析概論」にあります。三角関数ではなく, 究極の偶関数・奇関数の双曲線関数です。

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$




(a)OK,(b)OK,(c)OK（計算して見てください）ですが，問題作った人はさすがにこれだと面白くないとみたか,(d) がこのままだと傾き 1 であいません。ちょっと工夫して,

$f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}, g(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

これですべて OK。

(1) $f(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1, g(x) = \dfrac{e^0 - e^0}{2} = 0$

(2) $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \dfrac{(e^{2x} + e^{-2x})^2}{4} - \dfrac{(e^{2x} - e^{-2x})^2}{4} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4} = 1$

これは双曲線 $(x^2 - y^2 = 1)$ 関数の名前の由来です。

(3) 与式 $= \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{-e^{2x} + e^{-2x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{-2e^{2x} - 2e^{-2x}}{2} = -2$（ロピタルの定理　指数対数はこれが有効）

(4) $f'(x) = (\dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2})' = 2\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2g(x)$

(5) $\displaystyle\int_0^a \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} dx = \int_0^a \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{4} = \left[\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{16}\right]_0^a = \frac{e^{4a} + e^{-4a} - 2}{16} = \frac{(e^{2a} - e^{-2a})^2}{16} = 1$ より $(e^{2a} - e^{-2a})^2 = 16$

$(e^{2a} + e^{-2a})^2 - 4 = 16$ で $(e^{2a} + e^{-2a})^2 = 20$ となり $\dfrac{e^{2a} + e^{-2a}}{2} = \sqrt{5}$

ところで，$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ の双曲線関数ですが，

$\cosh x$ は懸垂線といって，紐を垂らしたときの軌跡です。

これも「再読・解析概論」にあります。