ゆがんだチェスボード

問題はゆがんだサイコロですけど，次を示す問題でした。

08 年東工大

(1) 2 回続けて同じ目が出る確率を P とすると $P \geqq \dfrac{1}{6}$

(2) 1 回目が奇数の目，2 回目が偶数の目が出る確率を Q とすると $\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$

(1) の解答は i の目が出る確率を p_i とすると $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$ だから

$P = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} p_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{6} p_k\right)^2 - 2\sum_{i \neq j} p_i p_j = 1 - 2R$ ただし $\displaystyle\sum_{i \neq j} p_i p_j = R$ とする。つまり $P = 1 - 2R \cdots$ ①

この $\displaystyle\sum_{i \neq j} p_i p_j$ を見ると $(pi - pj)^2$ を作ることに気がつき

$\displaystyle\sum_{i \neq j} (pi - pj)^2 = 5P - 2R \geqq 0 \cdots$ ② ここに ① を代入して $P \geqq \dfrac{1}{6}$ 等号は $p_i = \dfrac{1}{6} (i = 1, 2, \cdots, 6)$

さあ，ここから見方を変えて遊びましょう。1 辺 1 の正方形の縦横を $p_1, p_2, \cdots, p_6$ に分割したとすると，ゆがんだチェスボードになります。

図の斜線の部分が P 左下と右上が同じで R，① が目で見えます。

ゆがんでいると平均の概念が使えそうで,「2 乗の平均は平均の 2 乗より小さくない」$\cdots (*)$ ので,

$\dfrac{P}{6} \geqq \left(\dfrac{1}{6}\right)^2$ から $P \geqq \dfrac{1}{6}$ と簡単です。

(*) は数 I の範囲になりますか，分散です。等号は分散が 0，つまりすべて等しいとき。

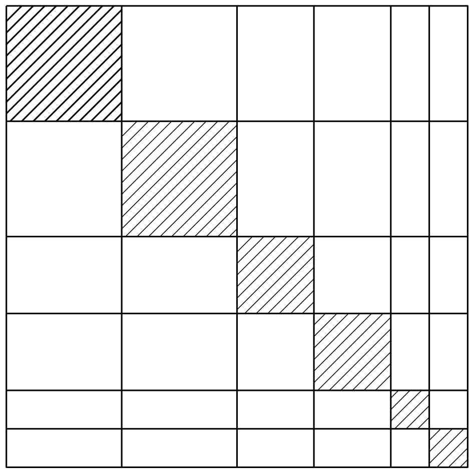
証明しておくと

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left\{n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2\right\}$$

$= \dfrac{1}{n^2}\{(n-1)P - 2R\} = \dfrac{1}{n^2}\left\{\displaystyle\sum_{i \neq j}(p_i - p_j)^2\right\} \geqq 0$ 等号は p_i すべて等しいとき。

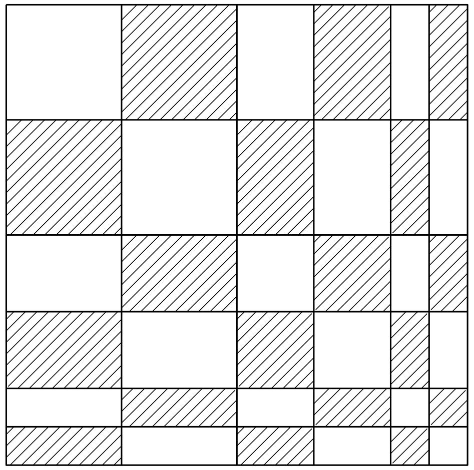
途中で $(n-1)P - 2R \geqq 0$ が出てきますが，$n = 6$ のときが②

ちなみに　$n = 3$ が有名な不等式 $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab \geqq 0$



(2) の Q を目で見ると（その 2 倍だけど），これがまさに「ゆがんだチェスボード」上の R を P を除く奇数どうしの積 S と偶数どうしの積 Q とに分けるわけだ。

だから $P + 2(Q + S) = 1 \cdots$ ①′



$p_1 + p_3 + p_5 = P_1, p_2 + p_4 + p_6 = P_2$ とすると，(*) より，$\dfrac{P_1^2 + P_2^2}{2} \geqq \left(\dfrac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

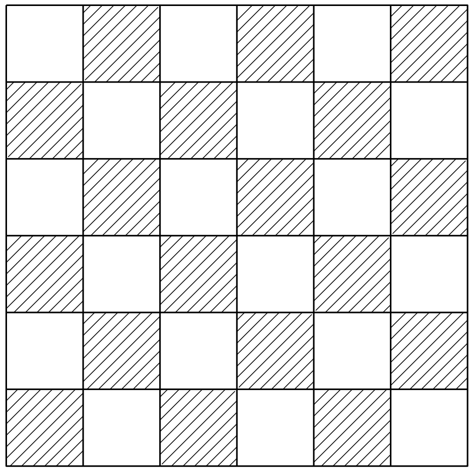
よって，$P + 2S \geqq \dfrac{1}{2}$，①′ を代入して $\dfrac{1}{4} \geqq Q$

P_1, P_2 でそれぞれ，(*) からいえる上の有名な不等式を使うと，

$p_1^2 + p_3^2 + p_5^2 \geqq p_1p_3 + p_3p_5 + p_5p_1, p_2^2 + p_4^2 + p_6^2 \geqq p_2p_4 + p_4p_6 + p_6p_2$

辺々加えて，$P \geqq S$，①′ を代入して $Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$

ゆがんでいない普通のチェスボードを見れば問題の等号はすべて理解できます。



ゆがんだボードから，ゆがんでないようにするのが人間がなすべきことだ，と格差社会の中で思ってしまうのは私だけでしょうか？代ゼミタワーの寮の値段を見てそう思ってしまった。