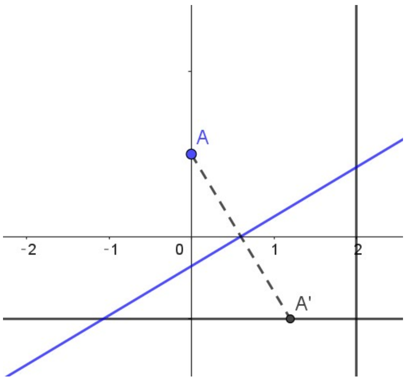
目で見たくなる問題

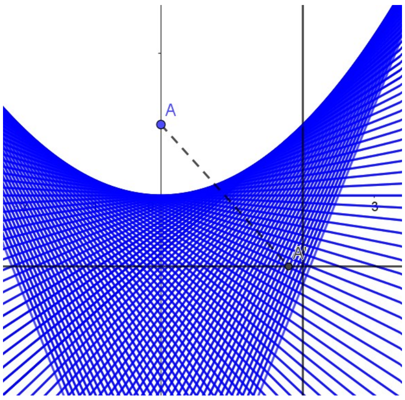
浜松医科大学の問題は４題すべて楽しめました。有名ではあるが折り紙の問題から。
東大の立体は回転体だから予想はつくが，実際に動かしては見たくなる。

24 浜松医科大学

正方形の紙αに下図のような座標軸をとり,2 点 A$(0,1)$,B$(-2,0)$, および,2 直線 $y=-1, x=2$ を定める。以下この 2 直線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 と表す。
このとき, 点 A を直線 ℓ_1 上の点 A'$(a,-1)$ に重ねてαを折ったときにできる折り目の直線を $\ell_3(a)$ とする。
ただし,A' はα上にとることとし, また, 以下の操作はすべてα 上で行うこととする。
以下の問いに答えよ。
(1) 直線 $\ell_3(a)$ の方程式を,a を用いて表せ。
(2) 点 A が直線 ℓ_1 上に位置するようにαを折り, そのときにできる折り目により, αを 2 つに分割する。このとき, 点 A が直線 ℓ_1 上に位置するような, どのような折り方をしても, その折り目に対して常に点 A と同じ側にある点全体の集合の境界線の方程式を求めよ。
(3) 点 A が直線 ℓ_1 上の点 A' に重なると同時に, 点 B が直線 ℓ_2 上の点に重なるようにαを折るとき, a の値を求めよ。

(1) AA' の垂直二等分線なので，AA' の中点 $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ を通る，方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=(a,-2)$ の直線
$a\left(x-\dfrac{a}{2}\right)-2y=0$ つまり $2ax-4y-a^2=0$

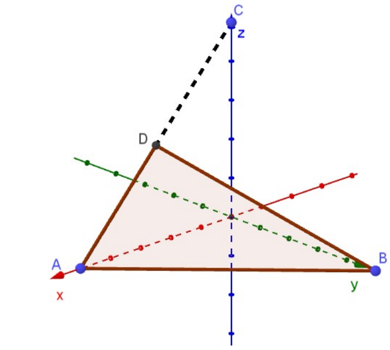




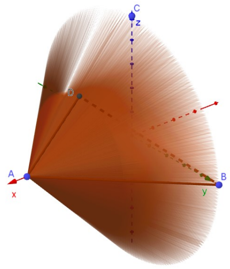
(2) a が動いたときにできる通過領域の境界線
直線を a についての 2 次方程式とみて $a^2-2ax+4y=0$ が実数解をもつ条件から
$x^2-4y \geqq 0$ よって，求める境界線の方程式は $x^2-4y=0$
(別解) 直線を a についての 2 次関数とみて $y=-\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{x}{2}a=-\dfrac{1}{4}(a-x)^2+\dfrac{x^2}{4} \leqq \dfrac{x^2}{4}$
(3) AA' と BB' の垂直二等分線が一致すればいい。
B' を $(2,b)$ とおくと，BB' の中点 $\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$ を通る，方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=(4,b)$ の直線
$4x+b\left(y-\dfrac{b}{2}\right)=0$ つまり $8x+2by-b^2=0$ が $2ax-4y-a^2=0$ と一致するには
$a=b=0$ でないので $\dfrac{8}{2a}=\dfrac{2b}{-4}=\dfrac{-b^2}{-a^2}$ つまり $\dfrac{4}{a}=\dfrac{b}{-2}=\dfrac{b^2}{a^2}$ を解けばいい。$a=2\sqrt[3]{2}$

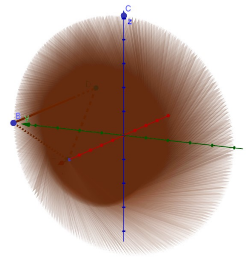
24 東京

座標空間内に 3 点 $A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,1)$ をとり,D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。



いたって単純。AB が x 軸から遠いから円錐の内部がえぐれたもの。ただの円錐にしか見えないか，内側から見ても。





さて， x 軸に垂直な平面で切った断面図で考えていく。

AD,AB,BD の直線の方程式を求めておくと $D\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ なので

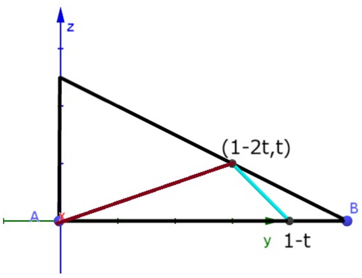
AD:$\frac{x-1}{-1}=\frac{z}{1},y=0$,AB:$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1},z=0$,BD:$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{\frac{1}{2}}$ つまり $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$

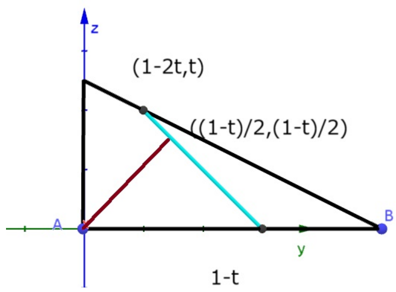
よって $x=t$ のとき，AD,AB,BD 上の点はそれぞれ $(t,0,1-t),(t,1-t,0)(t,1-2t,t)$

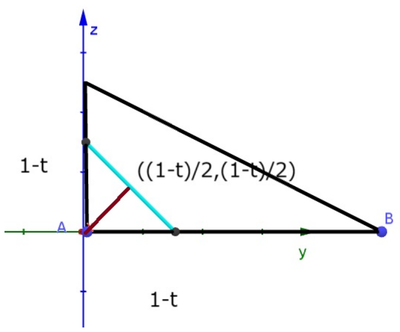
x 軸からの距離を調べる。

$\frac{1-t}{2}=1-2t$ つまり $t=\frac{1}{3}$ のとき場合に分かれて

(i) $0\leqq t\leqq\frac{1}{3}$　　(ii) $\frac{1}{3}\leqq t\leqq\frac{1}{2}$　　(iii) $\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$







よって，求める体積は

$$\pi\int_0^1(1-t)^2dt-\pi\left\{\int_0^{\frac{1}{3}}\{(1-2t)^2+t^2\}dt+\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{(1-t)^2}{2}dt\right\}$$

$$=\pi\left[-\frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1-\pi\left\{\left[-\frac{(1-2t)^3}{6}\right]_0^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{(1-t)^3}{6}\right]_{\frac{1}{3}}^1\right\}=\frac{\pi}{9}$$

最近の Geogebra は回転体も描くことができて，

どう表現しようか迷うな。