確率　色々

なかなか面白いものを。特に 2 項係数との関係は。

24 名古屋

袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を $p(0 \leqq p \leqq 1)$ とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を n 回行うとき, 赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1) $n \geqq 2$ に対して,$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

(2) $k = 1, 2, \cdots\cdots, n$ に対して, 等式 $f(k) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$ を示せ。

(3) 自然数 k に対して, 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$ を求めよ。

(1) 余事象を考えて $f(1) = 1-(1-p)^n, f(2) = 1-(1-p)^n - {}_n\mathrm{C}_1 p(1-p)^{n-1} = 1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}$

(2) なんかベータ関数っぽいな。

$f(k+1) = \dfrac{n!}{k!(n-k-1)!}\displaystyle\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}dx$

$= \dfrac{n!}{k!(n-k-1)!}\left\{-\dfrac{1}{(n-k)}\left(\left[x^k(1-x)^{n-k}\right]_0^p - k\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx\right)\right\}$

$= \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left\{-p^k(1-p)^{n-k} + k\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx\right\}$

$= -{}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx = f(k) - {}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$

$f(0) = 1$ とすればいい。$f(k+1) = f(k) - {}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$ で帰納的に等しい。

(3) $f(k+1) = \dfrac{n!}{k!(n-k-1)!}\displaystyle\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}dx$ で $p = \dfrac{1}{2}, n-1 = 2k$ とおけば

$f(k+1) = \dfrac{(2k+1)!}{k!k!}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$ よって $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx = \dfrac{k!k!}{(2k+1)!}f(k+1)$

ところで $f(k+1) = 1 - \left({}_{2k+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2k+1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{2k+1}\mathrm{C}_k\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} = \dfrac{1}{2}$ なので

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{k!k!}{(2k+1)!}$

なんと β 関数は $\beta(k+1, k+1) = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^k dx = \dfrac{k!k!}{(2k+1)!}$ だからその半分か！見事な問題。

24 東京工業

n を正の整数とし,$C_1, \cdots, C_n$ を n 枚の硬貨とする。

各 $k = 1, \cdots, n$ に対し, 硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k, 裏が出る確率を $1-p_k$ とする。

この n 枚の硬貨を同時に投げ, 表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功, というゲームを考える。

(1) $p_k = \dfrac{1}{3}(k = 1, \cdots, n)$ のとき, このゲームで成功する確率 X_n を求めよ。

(2) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}(k = 1, \cdots, n)$ のとき, このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ.

(3) $n = 3m$(m は正の整数) で,$k = 1, \cdots, 3m$ に対して $p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{3m}(k = 1, \cdots, m) \\ \dfrac{2}{3m}(k = m+1, \cdots, 2m) \\ \dfrac{1}{m}(k = 2m+1, \cdots, 3m) \end{cases}$ とする。

このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} Z_{3m}$ を求めよ.

(1) $p=\dfrac{1}{3}$ として ${}_n\mathrm{C}_1p(1-p)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_3p^3(1-p)^{n-3}+\cdots$ 2項係数の奇数番目だけ使う。

$1=(1-p+p)^n={}_n\mathrm{C}_0(1-p)^n+{}_n\mathrm{C}_1p^1(1-p)^{n-1}+\cdots$

$(1-2p)^n=(1-p-p)^n={}_n\mathrm{C}_0(1-p)^n-{}_n\mathrm{C}_1p^1(1-p)^{n-1}+\cdots$

(上) $-$ (下) で $1-(1-2p)^n=2{}_n\mathrm{C}_1p^1(1-p)^{n-1}+\cdots=2X_n$

よって $X_n=\dfrac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\}$, $p=\dfrac{1}{3}$ なので $X_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

(別解)　確率の問題をたくさん解いていると，奇数偶数とくれば漸化式を使うかな。

どちらにしても，確率は空間的方法（上の2項係数）と時間的方法（下の漸化式）とがあるのだ。

$X_{k+1}=(1-p)X_k+p(1-X_k)=(1-2p)X_k+p, X_1=p$

変形して $X_{k+1}-\dfrac{1}{2}=(1-2p)(X_k-\dfrac{1}{2})$ なので

$X_n=(p-\dfrac{1}{2})(1-2p)^{n-1}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(1-2p)(1-2p)^{n-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\}$

$p=\dfrac{1}{3}$ なので $X_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

(2) (1) の p が変わるので

$$Y_n=\frac{1}{2}\left[1-\prod_{k=1}^{n}\left\{1-2\frac{1}{2(k+1)}\right\}\right]=\frac{1}{2}\left(1-\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n}{2(n+1)}$$

$\left(\because \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\right)$

(別解1) これも両方のやり方で解いてみる。

$Y_{k+1}=p_k(1-Y_k)+(1-p_k)Y_k$ つまり $Y_{k+1}=(1-2p_k)Y_k+p_k, Y_1=\dfrac{1}{4}$

p_k を代入して変形すると $2(k+1)Y_{k+1}=2(k+1)Y_k+1$ (等差)

$2(n+1)Y_n=2(1+1)\dfrac{1}{4}+n-1=n$ よって $Y_n=\dfrac{n}{2(n+1)}$

(別解2)　2項係数とは行かないが，考え方を真似すると

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k+1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)}\right\}=1$ から次式を引けばいい。

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k+1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)}\right\}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{n+1}$$

よって $Y_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{2(n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(1-2\dfrac{1}{3m}\right)^m\right\}=p_0, \dfrac{1}{2}\left\{1-\left(1-2\dfrac{2}{3m}\right)^m\right\}=p_1, \dfrac{1}{2}\left\{1-\left(1-2\dfrac{1}{m}\right)^m\right\}=p_2$ とおくと

$$Z_m=\frac{1}{2}\{1-(1-2p_0)(1-2p_1)(1-2p_2)\}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m\right\}$$

$m\to\infty$ のとき $\left(1-\dfrac{2}{m}\right)^m=\left(1-\dfrac{2}{m}\right)^{(-\frac{m}{2})(-2)}\to e^{-2}$

$\left(1-\dfrac{2}{3m}\right)^m=\left(1-\dfrac{2}{3m}\right)^{(-\frac{3m}{2})(-\frac{2}{3})}\to e^{-\frac{2}{3}}, \left(1-\dfrac{4}{3m}\right)^m=\left(1-\dfrac{4}{3m}\right)^{(-\frac{3m}{4})(-\frac{4}{3})}\to e^{-\frac{4}{3}}$ なので

$$\lim_{m\to\infty}Z_m=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}e^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^4}\right)$$