連立漸化式　行列

今年は漸化式がそこら中、大学によっては複数の問題にも。その中で連立漸化式になるものを取り上げてみます。確率は，過程だから必然の方法です。問題文が長くなるのが欠点です。

24 東北

n を 2 以上の整数とする。それぞれ A,A,B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し, カードをもとに戻す試行を考える。

この試行を n 回繰り返し, 抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ,n 文字の文字列を作る。

作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また, 作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n=6$ のとき, 文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で, 文字列 BABAAB や BABABA などは可である。

作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n, 作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n, 作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

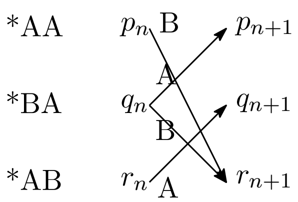
(1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ。また,$p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ。

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ。

(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし,i は虚数単位である。

(4) $p_n=r_n$ を満たすための,n の必要十分条件を求めよ。

確率漸化式の問題は推移図を作ります。



(1) $p_2=\dfrac{2}{3}\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}, p_2=\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}, p_2=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n, q_{n+1}=\dfrac{2}{3}r_n, r_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n$

(2)(3) こんなふうに複素数が出るのは意外なので（後で説明するように固有値が複素数），ちょっと迷いますが，(1) の漸化式を代入して計算です。

$p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}=\dfrac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n)$ なので，$p_n+2q_n+2r_n=(p_2+2q_2+2r_2)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$

$p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}=-\dfrac{1+i}{3}\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$ なので，

$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\{p_2+iq_2-(1+i)r_2\}\left(-\dfrac{1+i}{3}\right)^{n-2}=\dfrac{2}{9}\left(-\dfrac{1+i}{3}\right)^{n-2}$

(4) $p_n+iq_n-(1+i)r_n=p_n-r_n+i(q_n-r_n)$ なので，

上の一般項が純虚数になることが必要十分条件である。

$$\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right\}^{n-2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left\{\cos\frac{5(n-2)\pi}{4}+i\sin\frac{5(n-2)\pi}{4}\right\}$$

つまり　mod 4 で $5(n-2)\equiv 2$ よって $n\equiv 0$

昔，行列は高校の数学でやったんです。 n 乗計算とか。連立漸化式は行列が適しているんです。

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$ この固有値が $-\dfrac{1+i}{3}, -\dfrac{1-i}{3}, \dfrac{2}{3}$

初期値の関係で固有ベクトルが $(1,-(1+i),i),(1,-(1-i),i),(1,2,2)$, で，この問題が作られているのも分かるでしょう。Gepgebra は行列の計算がちょっと分からなかったので，Maxima（すごいいんです，固有値と固有ベクトルを計算するマクロがあります）で求めました。

$$\left[\left[\left[-\frac{\%i+1}{3}, \frac{\%i-1}{3}, \frac{2}{3}\right], [1,1,1]\right], \left[\left[\left[1, -\frac{\%i+1}{2}, \frac{\%i}{2}\right]\right], \left[\left[1, \frac{\%i-1}{2}, -\frac{\%i}{2}\right]\right], [[1,1,1]]\right]\right]$$

24 東京

座標平面上を次の規則 (i),(ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i) 最初に,P は点 $(2,1)$ にいる。

(ii) ある時刻で P が点 (a,b) にいるとき, その 1 秒後には P は

・ 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して (a,b) と対称な点

・ 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して (a,b) と対称な点

・ 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して (a,b) と対称な点

・ 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して (a,b) と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし,(1) については, 結論のみを書けばよい。

(1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2,1)$ にいる確率と, 最初から n 秒後に P が点 $(-2,-1)$ にいる確率は等しいことを示せ。

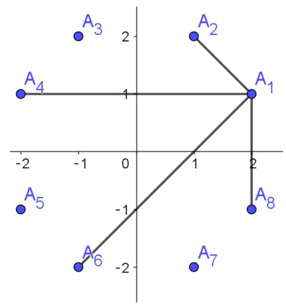
(3) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 $(2,1)$ にいる確率を求めよ。

(1) $(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1),(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2)$

(2) 図のように点を名前付けると，東大お得意の対称性が見えてくる。

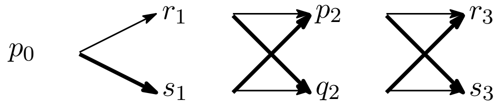
n 秒後にそれぞれの点にいる確率を $p_n(n)$ とかくと

$p_1(n+1)=\dfrac{1}{6}p_2(n)+\dfrac{1}{3}p_4(n)+\dfrac{1}{6}p_6(n)+\dfrac{1}{3}p_8(n)=p_5(n+1)$



(3) 対称性により,

$p_1(n)=p_5(n)=\dfrac{1}{2}p_n, p_3(n)=p_7(n)=\dfrac{1}{2}q_n, p_2(n)=p_6(n)=\dfrac{1}{2}r_n, p_4(n)=p_8(n)=\dfrac{1}{2}s_n,$ とおけて

推移図をかくと 

細い矢印は確率 $\dfrac{1}{3}$ ，太い矢印は確率 $\dfrac{2}{3}$

m を整数として $p_{2m+2}=\dfrac{1}{3}r_{2m-1}+\dfrac{2}{3}s_{2m-1}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}p_{2m}+\dfrac{2}{3}q_{2m}\right)+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}p_{2m}+\dfrac{1}{3}q_{2m}\right)$

$=\dfrac{5}{9}p_{2m}+\dfrac{4}{9}q_{2m}=\dfrac{5}{9}p_{2m}+\dfrac{4}{9}(1-p_{2m})=\dfrac{1}{9}p_{2m}+\dfrac{4}{9}$

変形して $p_{2m+2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{9}\left(p_{2m}-\dfrac{1}{2}\right)$ なので $p_{2m}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{9}\right)^{m-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{9}\right)^{m}\right\}$

$n=2m$ とすると $m=\dfrac{n}{2}$ なので $p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}$

よって求める確率は， n が奇数のとき 0， n が偶数のとき $\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}$

これも行列では

$$\begin{pmatrix} p_{2m+2} \\ q_{2m+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{2m+1} \\ s_{2m+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{2m} \\ q_{2m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{2m} \\ q_{2m} \end{pmatrix}$$

この行列の固有値と固有ベクトル $\left[\left[\left[1\,,\frac{1}{9}\right],[1\,,1]\right],[[[1\,,1]],[[1\,,-1]]]\right]$