絶対値を含む積分　私が2年前に注目した問題

慶応のちょっと変わった問題は，22年の北大の問題と似てます。

そのときに「私が注目した問題」として扱いました。

そして，今年は東大も絶対値の入った積分，構造は同じです。

24 慶応

連続関数 $f(x)$ は $f(x)>0$ を満たし,$1 \leqq x \leqq 3$ で単調に減少するものとする。

a を実数とし,S を $S=\displaystyle\int_1^3 |f(x)-ax|dx$ と定める。

(1) $I=\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$ と定める。

I と a を用いて S を表すと,$a \leqq \dfrac{f(3)}{3}$ のとき $S=\boxed{(ク)}$ となり,$a \geqq f(1)$ のとき $S=-\boxed{(ク)}$ となる。

(2) a が $\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ を満たしているとき,

$1<x<3$ の範囲で方程式 $f(x)-ax=0$ は解をただ1つ持つことを証明しなさい。

(3) a は $\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ を満たしているとする。

$1<x<3$ の範囲にある方程式 $f(x)=ax$ の解を $x=t$ とおく。

このとき,a を関数 $f(x)$ と実数 t を用いて表すと $a=\boxed{(ケ)}$ となる。

また,関数 $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(s)ds$ と,t に関する分数式 $q(t)=\boxed{(コ)}$ を用いて,

$S=2F(t)-F(3)+q(t)f(t)$ と表される。

(4) $F(x)$ を (3) で定めた関数,t_0 を $1<t_0<3$ を満たす実数とする。

$1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し

$F(x)-F(t_0) \geqq (x-t_0)f(x)$ が成り立つことを証明しなさい。

(5) $p(x)$ を $1 \leqq x \leqq 3$ で $p''(x)>0$ を満たす分数関数とし,t_0 を $1<to<3$ を満たす実数とする。

$p(t_0)=0$ かつ $p'(t_0)=\boxed{(サ)}$ ならば,$1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し

$2(x-t_0)f(x)+p(x)f(x) \geqq 0$ が成り立つ。

(6) $a=\boxed{(シ)}$ のときに,S は最小になる。

(1) $f(x)$ は単調減少であることに注意して

(i) $f(x)-ax \geqq 0(1 \leqq x \leqq 3)$，つまり $f(1)-a \geqq 0$ かつ $f(3)-3a \geqq 0$ よって　$a \leqq \dfrac{f(3)}{3}$　のとき

$$S=\int_1^3\{f(x)-ax\}dx=I-\left[\frac{ax^2}{2}\right]_1^3=I-4a$$

(ii) $f(x)-ax \leqq 0(1 \leqq x \leqq 3)$，つまり $f(1)-a \leqq 0$ かつ $f(3)-3a \leqq 0$ よって $a \geqq f(1)$ のとき

$$S=-\int_1^3\{f(x)-ax\}dx=-(I-4a)$$

(2) $g(x)=f(x)-ax$ とおくと，仮定より $g(1)=f(1)-a>0, g(3)=f(3)-3a<0$

$g(x)$ は連続関数なので区間 $(1,3)$ で少なくとも一つ解をもつ。

ただ一つは単調性をいえばよいが，$f(x), -ax$ ともに単調減少。$(\because a>\dfrac{f(3)}{3}>0)$

(3) $f(t)=at$ より $a=\dfrac{f(t)}{t}$

$$S=\int_1^t\{f(x)-ax\}dx-\int_t^3\{f(x)-ax\}dx=\int_1^t\{f(x)-ax\}dx-\int_t^1\{f(x)-ax\}dx-\int_1^3\{f(x)-ax\}dx$$

$= 2\int_1^t \{f(x)-ax\}dx + \int_1^3 \{f(x)-ax\}dx = 2\left[F(x)-\frac{ax^2}{2}\right]_1^t - \left[F(x)-\frac{ax^2}{2}\right]_1^3 = 2F(t)-F(3)-a(t^2-5)$

よって $-a(t^2-5) = -\frac{f(t)}{t}(t^2-5) = f(t)\left(-t+\frac{5}{t}\right)$ で $q(t) = -t+\frac{5}{t}$

(4) $F(x)$ は微分可能，$f(x)$ は単調減少であることに注意して

$\frac{F(x)-F(t_0)}{x-t_0} = F'(s) = f(s) \geqq f(x) \quad , 1<t_0<s<x<3$ ($1<x<s<t_0<3$ のときも同様)

(5) $\frac{p(x)-p(t_0)}{x-t_0} = p'(s) \geqq p'(t_0) = -2(1<t_0<s<x<3)$ ならば $f(x)>0, p(t_0)=0$ より

$p(x)f(x)+2(x-t_0)f(x) \geqq 0$

(6) $q''(x) = -\left(1-\frac{5}{t^2}\right)' = \frac{10}{x^3} > 0(1 \leqq x \leqq 3), q(t_0)=0$ より

$t_0=\sqrt{5}, q'(\sqrt{5})=0$ なので (5) の条件を満たして $q(x)f(x) \geqq -2(x-t_0)f(x)$

$S = 2F(t)-F(3)+q(t)f(t) \geqq 2F(t_0)+2(x-t_0)f(x)-2(x-t_0)f(x)-F(3) \geqq 2F(t_0)-F(3)$

$t=t_0=\sqrt{5}$ のとき最小，そのとき $a=\frac{f(\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$

22 年北大の問題は別のプリントで見てもらうことにして，

その後ろの考察を再記すると

『とするとですね, 以下のようなことが成立するのか。

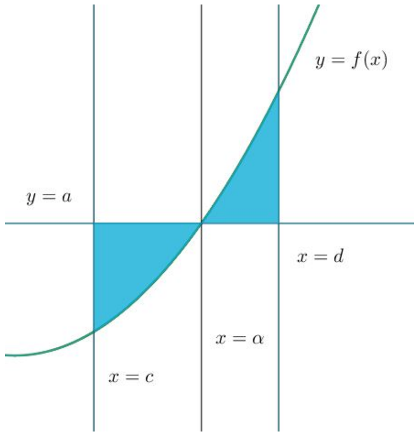
右図のような状況のとき（区間で単調増加あるいは減少）,

a をを変化させて,

図の青い部分の面積の和を最小にするのは,

$\alpha = \frac{c+d}{2}$ 　つまり, 中点。

どんな関数 $f(x)$ でも成立。



$f(\alpha)=a$,$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと,$F'(x)=f(x)$

$S(a) = \int_c^\alpha \{a-f(x)\}dx + \int_\alpha^d \{f(x)-a\}dx = \Big[ax-F(x)\Big]_c^\alpha + \Big[F(x)-ax\Big]_\alpha^d$

$= a(2\alpha-c-d)-2F(\alpha)+F(c)+F(d)$

$\frac{d}{da}S(a) = 2\alpha-c-d+2a\alpha'-2f(\alpha)\alpha' = 2\alpha-c-d+2a\alpha'-2a\alpha' = 2\alpha-c-d$』

慶應の問題は，これの $y=a$ が $y=ax$ になったものでしょ。

$S(a) = \int_c^\alpha \{ax-f(x)\}dx + \int_\alpha^d \{f(x)-ax\}dx = \left[\frac{ax^2}{2}-F(x)\right]_c^\alpha + \left[F(x)-\frac{ax^2}{2}\right]_\alpha^d$

$= a\alpha^2 - a\frac{c^2+d^2}{2} - 2F(\alpha)+F(c)+F(d)$

$\frac{d}{da}S(a) = \alpha^2+2a\alpha\alpha' - \frac{c^2+d^2}{2} - 2f(\alpha)\alpha' = \alpha^2 - \frac{c^2+d^2}{2} (\because a\alpha = f(\alpha))$

$\alpha = \sqrt{\frac{c^2+d^2}{2}}$ のとき最小。$c=1, d=3$ とすれば，$\alpha=\sqrt{5}$ すっきりしました？

24 東京

次の関数 $f(x)$ を考える。$f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{|t-x|}{1+t^2}dt\,(0\leqq x\leqq 1)$

(1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で,$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ。

(2) (1) で求めた α に対し,$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。

必要ならば,$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい。

(1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{x-t}{1+t^2}dt+\int_x^1\frac{t-x}{1+t^2}dt=x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt+\int_x^1\frac{t}{1+t^2}dt-x\int_x^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$=x\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt-\int_1^x\frac{t}{1+t^2}dt+x\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$

$f'(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt+\frac{x}{1+x^2}=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$

$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}=(1+\tan^2\theta)d\theta=(1+t^2)d\theta$

t	0	x	1
θ	0	$\tan^{-1}x$	$\dfrac{\pi}{4}$

$\tan^{-1}x$ は，この範囲で正接の値が x になる角のことを記号として用いた。

$f'(x)=\displaystyle\int_0^{\tan^{-1}x}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}x}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\tan^{-1}x}+\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}x}=2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{4}=0$ つまり $\tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{8}$

求める $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt2}}{1+\frac{1}{\sqrt2}}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}}=\sqrt2-1$

(3) あとは，計算のみ。

x	0		$\sqrt2-1$		1
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{1+t^2}=\frac12\int_0^1\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt=\frac12\Big[\log(1+t^2)\Big]_0^1=\frac{\log 2}{2}$

$f(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}-\frac{\log 2}{2}$：最大値

$(\because 2.8<\pi\iff 0.7<\dfrac{\pi}{4}\iff\dfrac{0.7}{2}<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{0.7}{2}$ なので $f(0)<\dfrac{0.7}{2}<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{0.7}{2}<f(1))$

$f(\sqrt2-1)=\displaystyle\int_0^{\sqrt2-1}\frac{\sqrt2-1-t}{1+t^2}dt+\int_{\sqrt2-1}^1\frac{t-\sqrt2+1}{1+t^2}dt$

$=(\sqrt2-1)\left\{\displaystyle\int_0^{\sqrt2-1}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_{\sqrt2-1}^1\frac{1}{1+t^2}dt\right\}-\int_0^{\sqrt2-1}\frac{t}{1+t^2}dt+\int_{\sqrt2-1}^1\frac{t}{1+t^2}dt$

$=(\sqrt2-1)\left\{\dfrac{\pi}{8}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}\right)\right\}-2\dfrac{\log\{1+(\sqrt2-1)^2\}}{2}+\dfrac{\log 2}{2}=\log\dfrac{\sqrt2+1}{2}$：最小値

ざっくり一般化します。$a \leqq x \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(t)|x-t|dt$ の最小値を求めよ。

$\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)|x-t|dt\right\} = \dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int_a^x f(t)(x-t)dt - \int_b^x f(t)(t-x)dt\right\}$

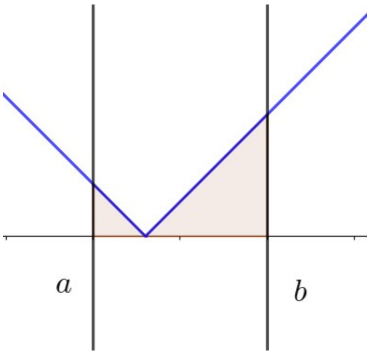
$= \dfrac{d}{dx}\left\{x\displaystyle\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt - \int_b^x tf(t)dt + x\int_b^x f(t)dt\right\}$

$= \displaystyle\int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - xf(x) + \int_b^x f(t)dt + xf(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x f(t)dt = 2F(x) - \{F(a)+F(b)\}$

$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数。

$F(x) = \dfrac{F(a)+F(b)}{2}$ のとき最小。

例えば $f(x)=1$ のとき，$x = \dfrac{a+b}{2}$ のとき最小。



この問題の場合 $F(x) = \tan^{-1} x, a=0, b=1$ つまり $\tan^{-1}(x) = \dfrac{0+\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{\pi}{8}$ で，$x = \tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ というわけ。

絶対値の積分出尽くした感があるな。