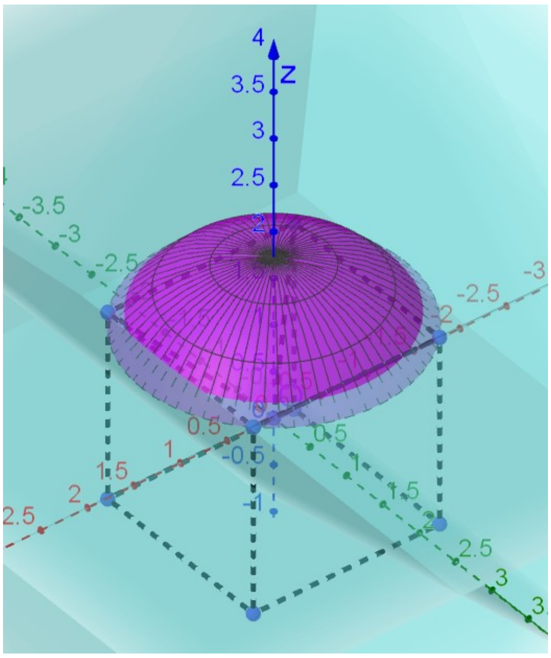
東大と信大の体積

やっぱり (1) だけでも，やっておくか。問題文を読むのだけでも大変，その力も問われているのだろうが。

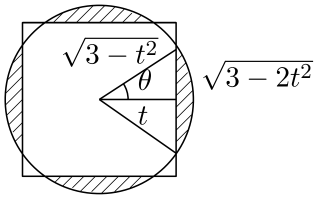
2023 東大

O を原点とする座標空間において, 不等式 $|x| \leqq 1, |y| \leqq 1, |z| \leqq 1$ の表す立方体を考える。
その立方体の表面のうち,$z < 1$ を満たす部分を S とする。
以下, 座標空間内の 2 点 A,B が一致するとき, 線分 AB は点 A を表すものとし, その長さを 0 と定める。

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i),(ii) をともに満たすとき, 点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。
(i) $\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$
(ii) 線分 OP と S は, 共有点を持たないか, 点 P のみを共有点に持つ。



下は球に内接する立方体,
立方体の上の部分の球を
4 平面が上に切りとる部分。
このてのものは,
xy 平面の平行な平面 $z=t$ で切る。
正方形から，円に変わる,
それを積分すればいい。



右図の半径 $\sqrt{3-t^2}$ の円から，斜線の部分（扇形から三角形をひく）の面積をひく。
斜線の部分は $4\frac{1}{2}(3-t^2)(2\theta-\sin 2\theta)=4(3-t^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{3-2t^2}{3-t^2}}-\sin\theta\cos\theta\right)$
$=4(3-t^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{3-2t^2}{3-t^2}}-\frac{\sqrt{3-2t^2}}{\sqrt{3-t^2}}\frac{t}{\sqrt{3-t^2}}\right)$
1 から $\sqrt{3-t^2}=t$ つまり $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$ までが，引く範囲。
よって，求める体積は,
$8+\pi\int_1^{\sqrt{3}}(3-t^2)dt-4\int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left\{(3-t^2)\arcsin\sqrt{\frac{3-2t^2}{3-t^2}}-t\sqrt{3-2t^2}\right\}dt=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\pi+\frac{20}{3}$

Geogebra は難なく計算しましたが，まさか手計算でこれを要求するはずないしな。
これ以外の手を考えなくてはいけない，となると,「数学は分析と総合の 2 つの考え方がある」という，遠山啓先生（昔の数学教育の偉人）の声がする。
細かく分ける方法でなくして，大きく合わせる方法で考えると,
上と側面 4 面と下の計 6 面については，すべて同じことが起こっている。
半径 $\sqrt{3}$ の球があり，1 辺の長さ 2 の立方体がそれに内接している。
$\frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\pi\sqrt{3}^3-8\right)+8=\frac{2}{3}(\sqrt{3}\pi+10)$

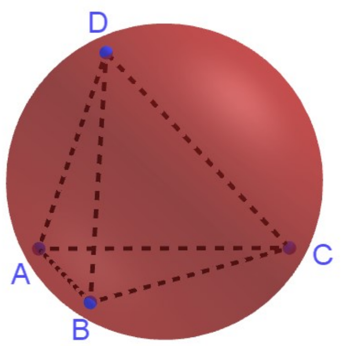
(2) はちょっと気が進まないなあ。そのかわりに，文系の体積を

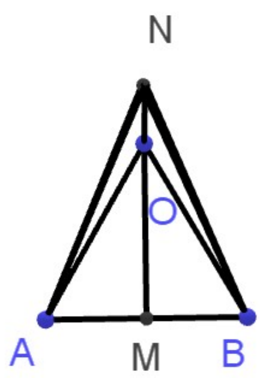
半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A,B,C,D が
AB=1,AC=BC,AD=BD,$\cos\angle ACB=\cos\angle ADB=\dfrac{4}{5}$ を満たしているとする。
(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

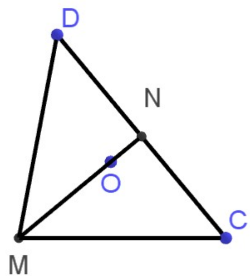
対称性に注意して問題を解くのは，上の問題と通じるところがある。
過去にもこんな問題があったような気がする。

(1) AC=BC=a とおくと，△ABC において余弦定理から $a^2+a^2-2a^2\dfrac{4}{5}=1$ より，$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$
よって求める面積は，$\dfrac{1}{2}a^2\sin\angle ACB=\dfrac{1}{2}\dfrac{5}{2}\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{4}$

(2) さあ対称性に注意して，
AB,CD の中点をそれぞれ M,N とすると，A,B,M,N は 1 平面上で，四面体はこの平面に関して対称。
よって，この平面上に球の中心 O はあり，CD⊥MN。
中図より，OM=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　右図より，ON= x ,CN= y とおくと







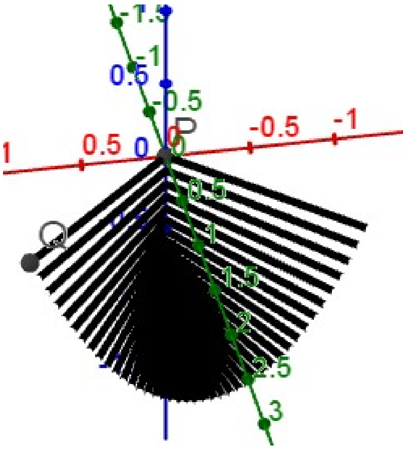
$x^2+y^2=1,\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+x\right)^2+y^2=CM^2=\dfrac{9}{4}$ これを解いて，ON=$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,CN=$\sqrt{\dfrac{11}{12}}$
よって求める体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle ABN\cdot CD=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot 2\sqrt{\dfrac{11}{12}}=\dfrac{\sqrt{11}}{9}$

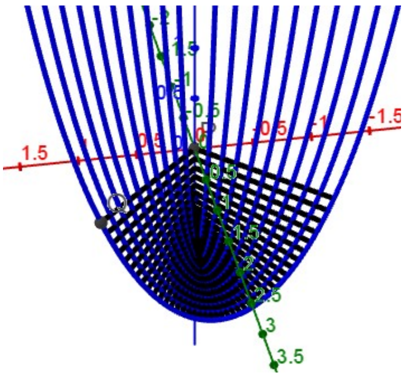
さて，理系に戻って通過範囲の体積ということで，コンピュータで見たくなるもの。

2023 信大

　t を実数とし, 座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}(0,0,t^2-1)$,$\mathrm{Q}(t,1,e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ を考える。
t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かすとき, 線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面 $y=1, z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ。

　Q の t を x にしたものは，確か懸垂線とかいう曲線ぽい。
ということで， y を固定して断面積を計算しよう。
線分 PQ の方程式は， $\dfrac{x}{t}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-t^2+1}{e^t+e^{-t}-e-e^{-1}-t^2+1}, (0 \leqq y \leqq 1)$





左図は実際に PQ を動かしてみた残像。右図は y を固定して曲線を描き，それを動かした残像。
ここで $y=s(s \neq 0)$ とおくと，$(ts, s, s(e^t+e^{-t}-e-e^{-1}-t^2+1)+t^2-1)$
平面 $y=s$ 上の曲線は $x=ts, z=s(e^t+e^{-t}-e-e^{-1}-t^2+1)+t^2-1$
$t=\dfrac{x}{s}$ を z に代入して，$z=s\left\{e^{\frac{x}{s}}+e^{-\frac{x}{s}}-e-e^{-1}-\left(\dfrac{x}{s}\right)^2+1\right\}+\left(\dfrac{x}{s}\right)^2-1$
$-1 \leqq t \leqq 1$ より $-1 \leqq \dfrac{x}{s} \leqq 1$ つまり，$-s \leqq x \leqq s$
断面積は $-\displaystyle\int_{-s}^{s}\left[s\left\{e^{\frac{x}{s}}+e^{-\frac{x}{s}}-e-e^{-1}-\left(\frac{x}{s}\right)^2+1\right\}+\left(\frac{x}{s}\right)^2-1\right]dx$
$=-2\left[s^2e^{\frac{x}{s}}-s^2e^{-\frac{x}{s}}-sex-se^{-1}x-\dfrac{x^3}{3s}+sx+\dfrac{x^3}{3s^2}-x\right]_0^s$
$=-2\left(-2s^2e^{-1}-\dfrac{s^2}{3}+s^2+\dfrac{s}{3}-s\right)=4s^2e^{-1}-\dfrac{4s^2}{3}+\dfrac{4s}{3}$
求める体積は，$\displaystyle\int_0^1\left(4s^2e^{-1}-\frac{4s^2}{3}+\frac{4s}{3}\right)ds=\left[\frac{4s^3}{3e}-\frac{4s^3}{9}+\frac{2s^2}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3e}-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3e}+\frac{2}{9}$
計算が怪しいので，実際 Geogebra でやってみると,

```
Integral(-Integral( y (e^(x / y) + e^((-x) / y) - e - 1 / e - x² / y² + 1) + x² / y² - 1,x,-y,y),y,0,1)
```

$\to \dfrac{\mathbf{2\ e+12}}{\mathbf{9\ e}}$