隣接2項間漸化式

両方とも，穴埋め形式の問題を記述式にした。

2023 立命館

n, k を自然数とする。 和が n となる k 以下の自然数の並べ方の総数を $F_k(n)$ で表す。

例えば,$k=2, n=3$ のときには 2,1 1,2 1,1,1 の 3 つの並べ方があるので, $F_2(3)=3$ である。

(1) 引き続き $k=2$ の場合を考える。

$F_2(4)=5$ である。2,2 2,1,1 1,2,1 以外の並べ方を答えよ。

また, $F_2(5)=8$ である。2,1,2 1,2,2 1,1,1,2 2,2,1 2,1,1,1 1,2,1,1 以外の並べ方を答えよ。

さらに, $F_2(7)$ を求めよ。

(2) $k=3$ の場合を考える, $F_3(5), F_3(6)$ を求めよ。

$F_3(10)=274, F_3(11)=504, F_3(12)=927$ である。$F_3(13)$ を求めよ。

(3)$k=2$ の場合に次の空欄に適する数を答よ。

$F_2(n+2)-\boxed{あ}F_2(n+1)=\boxed{い}\{F_2(n+1)-F_2\boxed{あ}F_2(n)\}$ ただし $\boxed{あ}<\boxed{い}$ とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_2(n+1)}{F_2(n)}$ を求めよ。

(4) $F_n(n)$ を求めよ。

上の問題は知っている人は知っているフィボナッチ数列の有名例。

ヒントの出し方に気配りが感じられます。

(1) 2,2 2,1,1 1,2,1 <u>1,1,2 1,1,1,1</u>

2,1,2 1,2,2 1,1,1,2 2,2,1 2,1,1,1 1,2,1,1 <u>1,1,2,1 1,1,1,1,1</u>

後ろに 2 を加える場合と，1 を加える場合でいいぞと。

$F_2(n+2)=F_2(n+1)+F_2(n)$ より $F_2(6)=F_2(5)+F_2(4)=13, F_2(7)=F_2(6)+F_2(5)=21$

(2) 後ろに 3,2,1 を加える場合を考えて,

$F_3(n+3)=F_3(n+2)+F_3(n+1)+F_3(n)$ より $F_3(13)=F_3(12)+F_3(11)+F_3(10)=927+504+274=1705$

(3) 特性方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ を使って，あ $=\dfrac{1-5}{2}$, い $=\dfrac{1+5}{2}$

$F_2(n+2)=F_2(n+1)+F_2(n)$ の両辺を $F_2(n+1)$ で割り，$\dfrac{F_2(n+2)}{F_2(n+1)}=1+\dfrac{F_2(n)}{F_2(n+1)}$

求める極限を α とすると（存在するとすればだけど），$\alpha=1+\dfrac{1}{\alpha}$つまり$\alpha^2-\alpha-1=0$

正の方をとって，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（記述式なら漸化式を解いた解を利用かな）

(4) 穴埋めなら，$F_1(1)=1, F_2(2)=2, F_3(3)=4$ で，2^{n-1} と推測で終わり。

さて，足して n となると，重複組合せ ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$ を使おうかなと思います（？）。

1 種類の数字（ n ）で n を表すのは 1 通り，2 種類の数字で（ $n-1, 1$ とか ） n を表すのは $n-1$ 通り，$\cdots$

和を表すのに 0 を抜くので，重複組合せに少し細工して,

異なる r 種類のものから重複を許して $n-r$ 個取る重複組合せを使い

${}_1H_{n-1}+{}_2H_{n-2}+\cdots+{}_nH_0={}_{n-1}C_{n-1}+{}_{n-1}C_{n-2}+\cdots+{}_{n-1}C_0=(1+1)^{n-1}=2^{n-1}$

2023 同志社

n を自然数とする。１個のさいころを投げる試行において, 1 または 2 の目が出れば 2 点, 3 以上の目が出れば 1 点を得るとする。

(1) この試行をくり返し行うとき, 得点の合計が途中でちょうど n 点となる確率を p_n とするとき p_2-p_1, p_4 を求めよ。

(2) また, 等式 $p_{n+2}-p_{n+1}=a(p_{n+1}-p_n)$ がすべての自然数 n で成り立つような定数 a の値を求め, p_n を n の式で表わせ。

(3) 一方, n が 2 以上の自然数のとき,
得点の合計が途中で, ちょうど n 点となることなくちょうど $(n+5)$ 点となる確率 q_n を n の式で表せ。

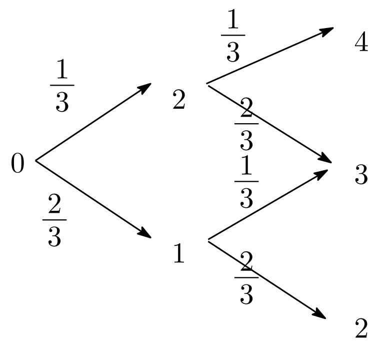
(1) $p_1=\dfrac{2}{3}, p_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{9}$ より $p_2-p_1=\dfrac{7}{9}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$

$p_{n+2}=\dfrac{2}{3}p_{n+1}+\dfrac{1}{3}p_n$

（上の問題はただ足すだけだったのが）なので,

$p_3=\dfrac{2}{3}p_2+\dfrac{1}{3}p_1=\dfrac{14}{27}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{20}{27}$

$p_4=\dfrac{2}{3}p_3+\dfrac{1}{3}p_2=\dfrac{40}{81}+\dfrac{7}{27}=\dfrac{61}{81}$



(2) 特性方程式 $3x^2-2x-1=0$ を解いて，$(3x+1)(x-1)=0$ つまり $x=1,-\dfrac{1}{3}$ なので $a=-\dfrac{1}{3}$

漸化式を解くと,

$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

よって，$n \geqq 2$ のとき $p_n=p_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{k+1}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{9}\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{12}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}=\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$ ($n=1$ のときも成立)

(3) n 点になることなく次に進むのは，p_{n-1} で，2 点とり，p_{n+1} そして，p_{n+5} まで 4 回試行を繰り返すので,

$q_n=p_{n-1}\dfrac{1}{3}p_4=\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{5}\right\}=\dfrac{3}{16}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}\dfrac{244}{243}=\dfrac{61}{324}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}$