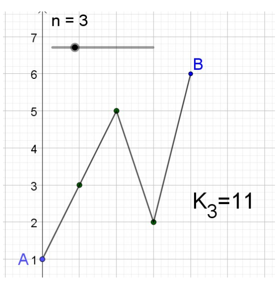
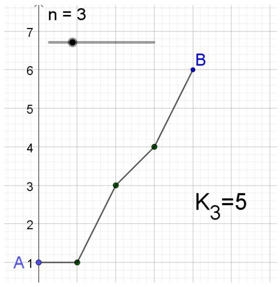
絶対値

絶対値が使われていて，面白い問題を北と南から 1 題づつ。

23 北海道
n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とし，
$K_n = |1-a_1| + |a_1-a_2| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n-6|$ とおく。
また,K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。
(1) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ。
(2) q_n を求めよ。また,$K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ。
(3) n を 4 以上の自然数とする。$L_n = K_n + |a_4-4|$ とおき,L_n のとりうる値の最小値を r_n とする。
$L_n = r_n$ となる確率を求めよ。

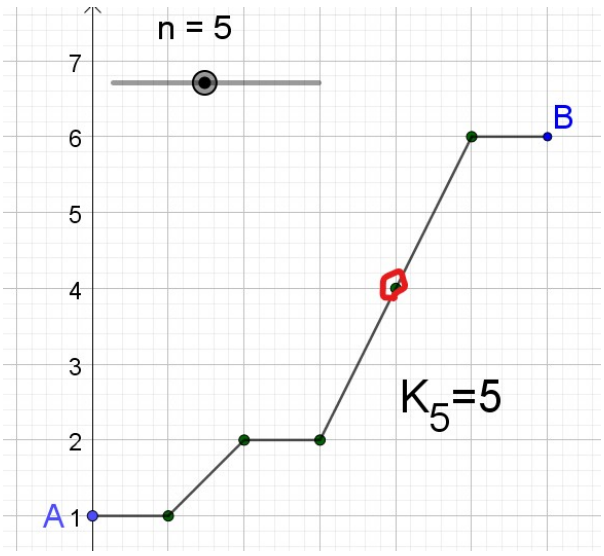
「絶対値の処理はグラフが便利」
この問題グラフ化してみると，
横軸は回数，縦軸はサイコロの目， n は回数 。
（サイコロの目は乱数で出してます）
K_n は隣との差の合計のこと。





(1) 1 から 6 まで変化の差の合計が 5。
つまり，上のグラフの右の場合のようにサイコロの目を非減少に並べればいい。
異なる 6 個のものから重複を許して 3 個取ってくれば，並び方はきまる。
よって，求める確率は $\dfrac{{}_6H_3}{6^3} = \dfrac{{}_8C_3}{6^3} = \dfrac{\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}{6^3} = \dfrac{56}{6^3} = \dfrac{7}{27}$

(2) 上の考察から $q_n = 5, a_1, a_2, \cdots, a_n$非減少



(3) $a_4 = 4$ となり，あとは非減少に並べばいいので，
まず 1 から 4 の中から 3 回選び，4 から 6 の中から $n-4$ 回選べばいい。
求める確率は， $\dfrac{{}_4H_3 \cdot {}_3H_{n-4}}{6^n} = \dfrac{{}_6C_3 \cdot {}_{n-2}C_2}{6^n} = \dfrac{10(n-2)(n-3)}{6^n}$

23 九州

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = \alpha, a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

で定められるとき，以下の問に答えよ。

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ の収束, 発散を調べよ。

(2) $\alpha > 2$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ の収束, 発散を調べよ。

(3) $1 < \alpha \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ の収束, 発散を調べよ。

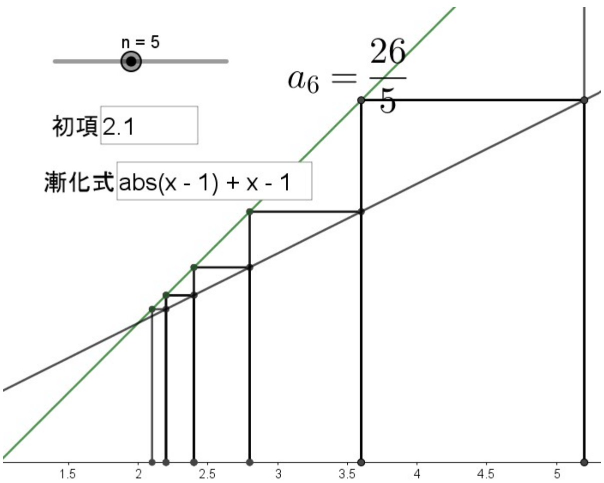
(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ の収束, 発散を調べよ。

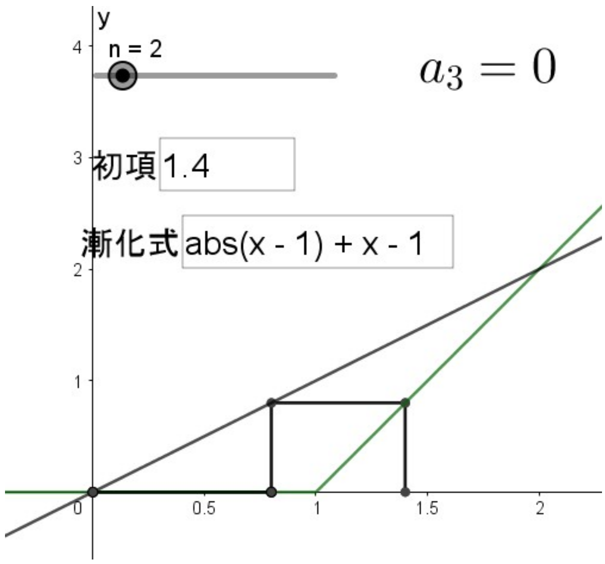
(1) $a_{n+1} = 1 - a_n + a_n - 1 = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ となり，０に収束。

(2) $a_n > 2$ のとき $a_{n+1} = a_n - 1 + a_n - 1 = 2(a_n - 1) > 2$

$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$ より変形して，$a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$

よって，$a_n = (\alpha - 2)2^{n-1} + 1 \to \infty (n \to \infty)$ なので，無限大に発散する。





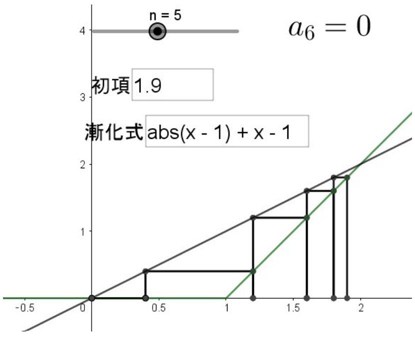
(3) $1 < \alpha \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき,$a_2 = a_1 - 1 + a_1 - 1 = 2(\alpha - 1) \leqq 1$

よって，(1) と同様に 0 に収束。

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき, 何回かやれば (3) の範囲つまり (1) と同様に０に収束。

これを数式で示せばいいのだが。

$\dfrac{3}{2} < a_1 = \alpha < 2$ より $1 < a_{n+1} = 2a_n - 2 < 2 (n = 1, 2, \cdots)$



a_n が範囲 $[\dfrac{3}{2}, \dfrac{\frac{3}{2}+2}{2} = \dfrac{7}{4}]$ にいるときは,

a_{n+1} は範囲 $[1, \dfrac{2}{3}]$ にいる。

$b_1 = \dfrac{3}{2}, b_{n+1} = \dfrac{b_n + 2}{2} \cdots$ ① とすると,

$[b_n, b_{n+1}]$ は n 回で $[1, \dfrac{3}{2}]$ になる。

① を解くと，$b_n = \left(\dfrac{3}{2} - 2\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \to 2 (n \to \infty)$

(1)(3) により,0 に収束。ぐらいでいいのかどうか。