点と直線との距離の公式　3次元版

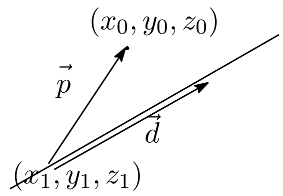
教科書に公式扱いされているわけではないが，3 次元版の点と直線の距離の公式を作ったところ，入試問題でも結構使えたので紹介しよう。

点 (x_0, y_0, z_0) と直線 $\dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c}$ との距離は，

$\vec{d} = (a, b, c), \vec{p} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ とおくと，

$$\frac{\sqrt{|\vec{d}|^2|\vec{p}|^2 - (\vec{d}\cdot\vec{p})^2}}{|\vec{d}|}$$

$\vec{d}, \vec{p}$ が作る平行四辺形の面積を，底辺の長さで割って高さを出す。



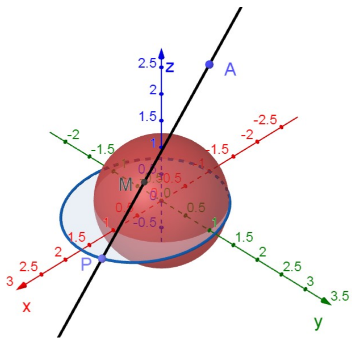
23 同志社改作
点 O を原点とする xyz 空間内に,O を中心とする半径 1 の球面 S と点 $\mathrm{A}(-1, 0, 2)$ がある。
直線が球面 S とただ 1 つの共有点をもつとき, 直線は球面 S に接するという。
平面上の点 $\mathrm{P}(u, v, 0)$ を考え, 直線 AP が球面 S に接するように点 P が xy 平面上を動くとき,
xy 平面における点 P の軌跡 H の方程式を u, v を用いて表せ。

O と直線 AP の距離が 1 となればいい。
上の公式で，$\vec{d} = (u+1, v, -2), \vec{p} = (1, 0, -2)$ として，

$$\frac{\sqrt{5\{(u+1)^2 + v^2 + (-2)^2\} - \{(u+1+4)^2\}}}{\sqrt{5\{(u+1)^2 + v^2 + (-2)^2\}}} = 1$$

$4\{(u+1)^2 + v^2 + (-2)^2\} - \{(u+5)^2\} = 0$

よって，求める方程式は $3u^2 - 2u + 4v^2 - 5 = 0$



東工の問題も（次ページ）

23 東工大

xyz 空間の 4 点 A$(1,0,0)$,B$(1,,1,1)$,C(ー1,1,ー1),D(ー1,0,0) を考える。

(1) 2 直線 AB,BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ。

(2) 4 直線 AB,BC,CD,DA に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ。

(1) 条件を満たす点を (x,y,z) とすると，この点と直線 AB,BC との距離が等しいので

直線 AB,BC の方向ベクトルは，それぞれ $(0,1,1),(-2,0,-2)$ で，通る点は $(1,1,1)$

$\vec{d}_1=(0,1,1),\vec{d}_2=(1,0,1),\vec{p}=(x-1,y-1,z-1)$ として公式利用。

$$\frac{\sqrt{2|\vec{p}|^2-(y-1+z-1)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2|\vec{p}|^2-(x-1+z-1)^2}}{\sqrt{2}}$$

$(y-1+z-1)^2-(x-1+z-1)^2=0$ つまり $(x+y+2z-4)(y-x)=0$

よって，求める図形は平面 $x+y+2z-4=0\cdots$①$,x-y=0\cdots$② (垂直 2 等分面)

(2) 直線 BC,CD と CD,DA で同様なことを繰り返し，

直線 BC,CD の方向ベクトルは，それぞれ $(-2,0,-2),(0,-1,1)$ で，通る点は $(-1,1,-1)$

$\vec{d}_1=(1,0,1),\vec{d}_2=(0,-1,1),\vec{p}=(x+1,y-1,z+1)$ として公式利用。

$$\frac{\sqrt{2|\vec{p}|^2-(x+1+z+1)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2|\vec{p}|^2-(-y+1+z+1)^2}}{\sqrt{2}}$$

$(x+z+2)^2-(-y+z+2)^2=0$ つまり $(x-y+2z+4)(x+y)=0$

平面 $x-y+2z+4=0\cdots$③$,x+y=0\cdots$④

直線 CD,DA の方向ベクトルは，それぞれ $(0,-1,1),(2,0,0),$ で，通る点は $(-1,0,0)$

$\vec{d}_1=(0,-1,1),\vec{d}_2=(1,0,0),\vec{p}=(x+1,y,z)$ として公式利用。

$$\frac{\sqrt{2|\vec{p}|^2-(-y+z)^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{|\vec{p}|^2-(x+1)^2}\cdots⓪$$

$(-y+z)^2-2(x+1)^2=0$ つまり $(\sqrt{2}x-y+z+\sqrt{2})(\sqrt{2}x+y-z+\sqrt{2})=0$

平面 $\sqrt{2}(x+1)-y+z=0\cdots$⑤$,\sqrt{2}(x+1)+y-z=0\cdots$⑥

①,②から一つ ③,④ から一つ⑤,⑥から一つを取って連立し，合計 $2^3=8$ 個の点が求まる。

例えば②④⑥の場合，中心 $(0,0,\sqrt{2})$ で，半径は⓪から $\sqrt{2}$

以下同様に複号同順で中心の座標と半径は

$(0,0,\pm\sqrt{2})$，$\sqrt{2}$，　$(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},-2)$，$\sqrt{6}$，　$(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2},2)$，$\sqrt{6}$，　$(\pm2\sqrt{2},4,\mp2\sqrt{2})$，$3\sqrt{2}$