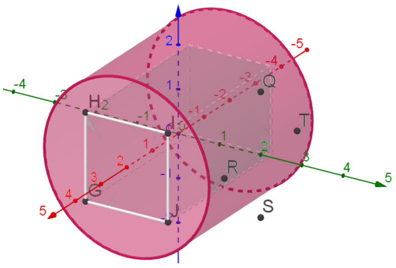
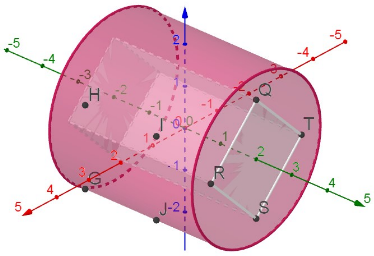
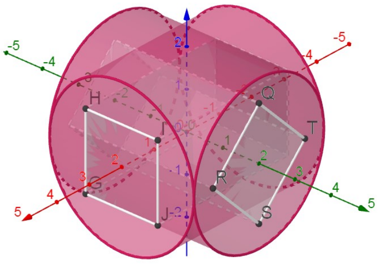
交わる穴空き円柱

「解析概論」の練習問題にある円柱の交わりの体積から,「100 年前の東大入試」の $2n$ 個の円柱の交わりの体積，そしてこの穴空き円柱の交わりの体積と発展してきたというか複雑化してきたというか … 。
問題を読む気力さえなくなるような。これだけ複雑化すると 3 D の図も苦しいんだよな。

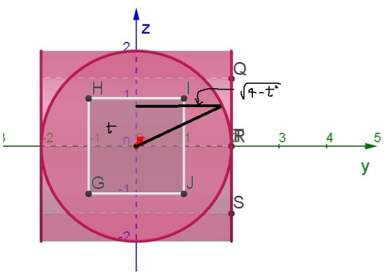
23 東京工業
xyz 空間において, x 軸を軸とする半径 2 の円柱から,
$|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする。
また,A を x 軸のまわりに 45° 回転してから z 軸のまわりに 90° 回転したものを B とする。
A と B の共通部分の体積を求めよ。.

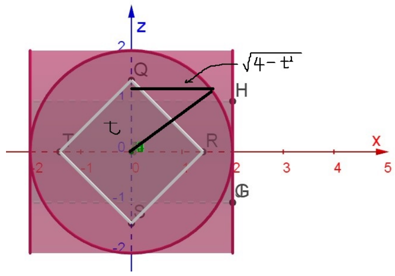






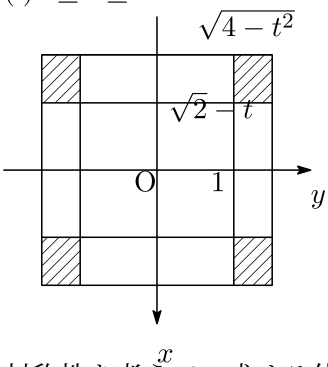
$z=t$ として， xy 平面に平行な面で切ると，穴が開いていないときは正方形。



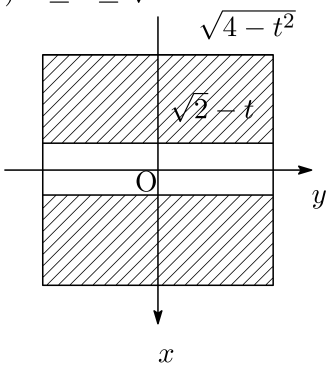


穴の開き方で場合分け。

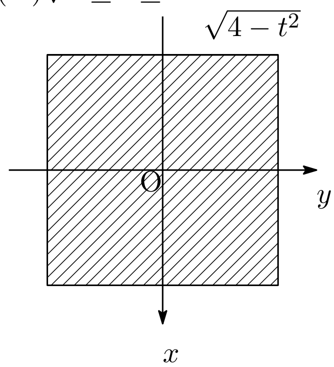
(i)$0 \leqq t \leqq 1$



(ii) $1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$



(iii)$\sqrt{2} \leqq t \leqq 2$



対称性を考えて，求める体積は

$$2\left[4\int_0^1\left\{\sqrt{4-t^2}-(\sqrt{2}-t)\right\}(\sqrt{4-t^2}-1)dt+2\int_1^{\sqrt{2}}2\sqrt{4-t^2}\left\{\sqrt{4-t^2}-(\sqrt{2}-t)\right\}dt+\int_{\sqrt{2}}^2(2\sqrt{4-t^2})^2dt\right]$$

$$=8\left[\int_0^2(4-t^2)dt-\int_0^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-t)\sqrt{4-t^2}dt+\int_0^1(\sqrt{2}-t-\sqrt{4-t^2})dt\right]$$

$$=8\left\{\left[4t-\frac{t^3}{3}\right]_0^2-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}2^2\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2\right)-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}+\left[\sqrt{2}t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1-\left(\frac{1}{2}2^2\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}1\sqrt{3}\right)\right\}$$

$$=60-4\sqrt{3}-\frac{16}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{2}\pi$$

積分計算も，しんどい。