# 私が注目した問題

**22 電通大後期**

座標平面上で原点 O を中心とする円 C:$x^2+y^2=4$ と点 A$(1,0)$ を考える。

円 C 上の点 P$(x_1,y_1)$ に対し, 線分 AP の垂直二等分線を $\ell_P$ とする。

点 P が円 C 上を動くとき, 直線 $\ell_P$ の通過する領域を D とする。

(1) 直線 $\ell_P$ の方程式を求めよ。

(2) 領域 D を表す不等式を求めよ。

(3) 円 C で囲まれた領域 $x^2+y^2 \leqq 4$ と領域 D の共通部分の面積 S を求めよ。

これ何年か前にこのページに出したものなのだ「包絡線の応用」。円上の点と固定された 1 点を結ぶ直線に垂直なその円上の点を通る直線の通過領域。垂直二等分線に代わっているだけで同じ。出典「物理数学の道具箱」

(1) AP の中点 $\left(\dfrac{x_1+1}{2}, \dfrac{y_1}{2}\right)$ を通り, 法線ベクトル $(x_1-1, y_1)$ の直線だから,

$(x_1-1)\left(x-\dfrac{x_1+1}{2}\right)+y_1\left(y-\dfrac{y_1}{2}\right)=0$ つまり,$2(x_1-1)x+2y_1y=x_1^2+y_1^2-1$

ここで $x_1^2+y_1^2=4\cdots$① より,$2(x_1-1)x+2y_1y=3\cdots$②

(2) ①と②を連立させて, $x_1$ か $y_1$ のどちらかを消去して, 残った方の実数条件で求めてもいいが, 計算が複雑。

ここで $(x_1,y_1)=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ とおくと,

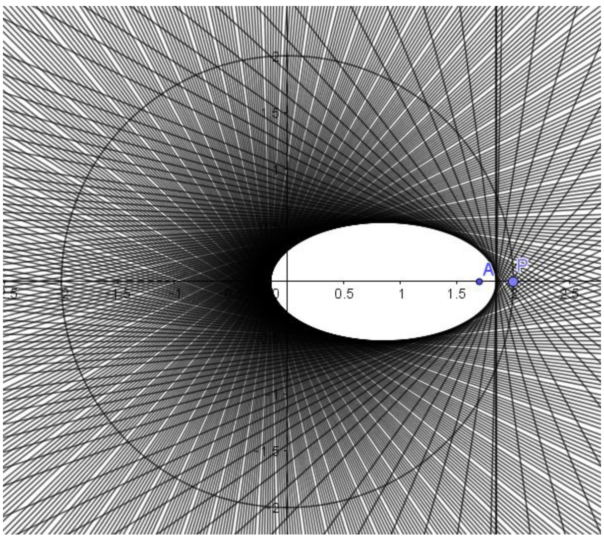
$2(2\cos\theta-1)x+2\cdot 2\sin\theta y=3$ つまり,$4y\sin\theta+4x\cos\theta=2x+3$

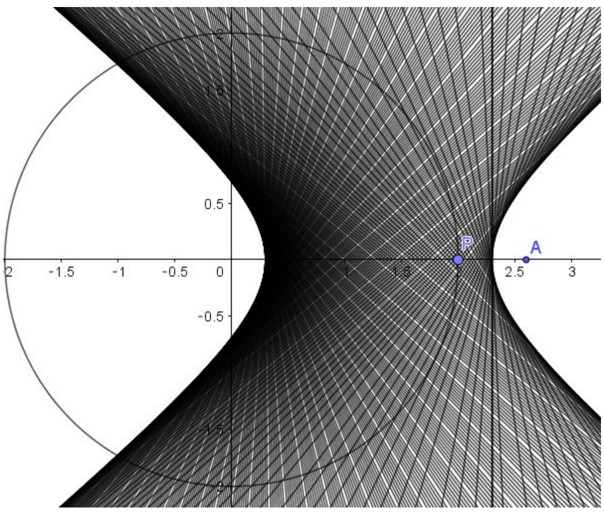
$\sqrt{16x^2+16y^2}\sin(\theta-\alpha)=2x+3$ つまり,$\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{2x+3}{4\sqrt{x^2+y^2}}$

この $\theta$ が存在する条件として,$\dfrac{|2x+3|}{4\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1$ 整理して,$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{y^2}{\frac{3}{4}} \geqq 1$

(3) これは楕円なので, 求める面積は,$\left(4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$

これ固定された点が円の外だと双曲線になるんです。詳しくは再読「高木貞治」の中の「包絡線の応用」で。



**22 北大**

(1) 連立不等式 $x \geqq 2,\ 2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の表す領域を $xy$ 平面上に図示せよ。

ただし，自然対数の底 $e$ が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい。

(2) $a > 0$ に対して，

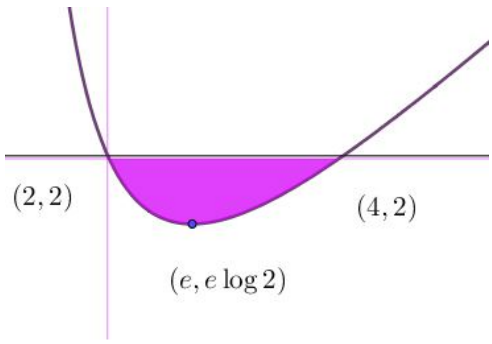
連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6,\ (x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ の表す $xy$ 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする。

$S(a)$ を最小にする $a$ の値を求めよ。

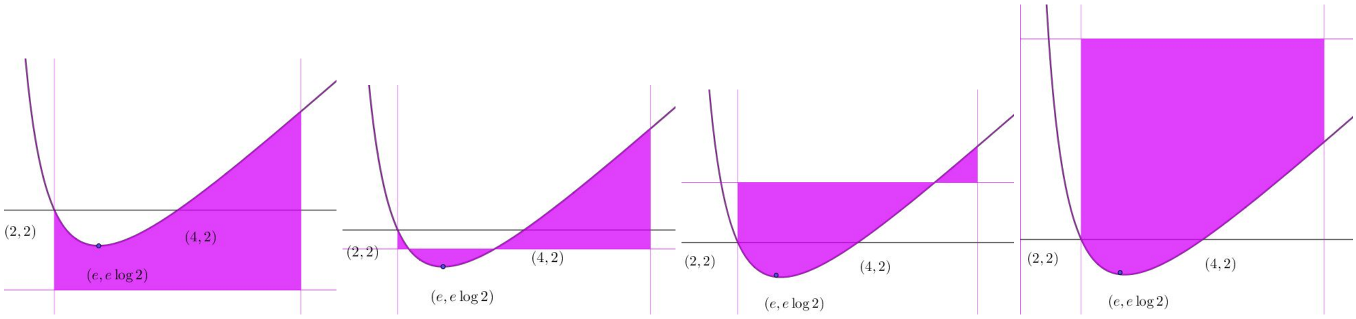
(1) $x \geqq 2$ より, $\dfrac{x}{\log x}\log 2 \leqq y \leqq 2$

左辺を $f(x)$ とおくと, $f'(x) = \dfrac{\log 2}{(\log x)^2}(\log x - 1)$

| $x$ | $2$ | | $e$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $e\log 2$ | $\nearrow$ |




(2) $a$ の場合分けをして,




(i) $a < e \leqq e\log 2$ のとき, 明らかに $S(a)$ 単調減少

(ii) $e\log 2 < a \leqq 2$ のとき, $f(x) = a$ の解を $\alpha < e < \beta$ とすると, $f(\alpha) = a,\ f(\beta) = a$ で,

$$S(a) = \int_2^\alpha \{(f(x) - a\}dx - \int_\alpha^\beta \{f(x) - a\}dx + \int_\beta^6 \{f(x) - a\}dx$$

$$= \int_2^\alpha f(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^6 f(x)dx - a(\int_2^\alpha dx - \int_\alpha^\beta dx + \int_\beta^6 dx)$$

$$= \int_2^\alpha f(x)dx + \int_e^\alpha f(x)dx - \int_e^\beta f(x)dx - \int_6^\beta f(x)dx - a(4 + 2\alpha - 2\beta)$$

（ここからです, 今まであまりなかったところ）

$$\frac{d}{da}S(x) = \frac{d\alpha}{da}\frac{d}{d\alpha}\int_2^\alpha f(x)dx + \frac{d\alpha}{da}\frac{d}{d\alpha}\int_e^\alpha f(x)dx - \frac{d\beta}{da}\frac{d}{d\beta}\int_e^\beta f(x)dx - \frac{d\beta}{da}\frac{d}{d\beta}\int_6^\beta f(x)dx$$

$$-(4 + 2\alpha - 2\beta) - 2a(\frac{d\alpha}{da} - \frac{d\beta}{da})$$

$$= 2\frac{d\alpha}{da}f(\alpha) - 2\frac{d\beta}{da}f(\beta) - a(4 + 2\alpha - 2\beta) - 2a(\frac{d\alpha}{da} - \frac{d\beta}{da}) = 2\frac{d\alpha}{da}a - 2\frac{d\beta}{da}a - (4 + 2\alpha - 2\beta) - 2a(\frac{d\alpha}{da} - \frac{d\beta}{da})$$

$= 2(\beta - \alpha - 2) < 0$ で, 単調減少

(iii) $2 < a \leqq f(6)$ のとき, $f(x) = a$ の解を $e < \beta$ とすると, $f(\beta) = a$ で,

$$S(a) = -\int_2^\beta \{f(x) - a\}dx + \int_\beta^6 \{f(x) - a\}dx = -\int_2^\beta f(x)dx - \int_6^\beta f(x)dx - a(8 - 2\beta)$$

$\dfrac{d}{da}S(x) = -2\dfrac{d\beta}{da}f(\beta) - (8 - 2\beta) + 2a\dfrac{d\beta}{da} = 2(\beta - 4) > 0$ で, 単調増加

(iv) $f(6) < a$ のとき, 明らかに $S(a)$ 単調増加

以上から, $a = 2$ のとき $S(a)$ 最小となる。

とするとですね, 以下のようなことが成立するのか。

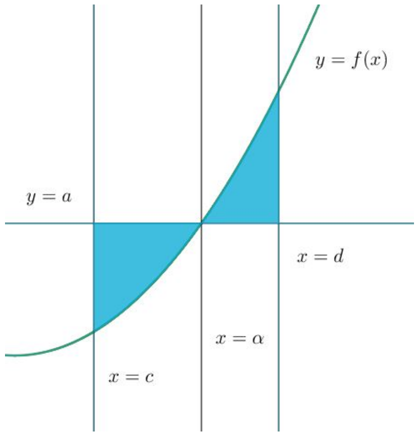
右図のような状況のとき（区間で単調増加あるいは減少）,

$a$ をを変化させて,

図の青い部分の面積の和を最小にするのは,

$\alpha = \dfrac{c+d}{2}$　つまり, 中点。

どんな関数 $f(x)$ でも成立。




$f(\alpha) = a$,$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと,$F'(x) = f(x)$

$$S(a) = \int_c^{\alpha} \{a - f(x)\}dx + \int_{\alpha}^{d} \{f(x) - a\}dx = \Big[ax - F(x)\Big]_c^{\alpha} + \Big[F(x) - ax\Big]_{\alpha}^{d}$$

$$= a(2\alpha - c - d) - 2F(\alpha) + F(c) + F(d)$$

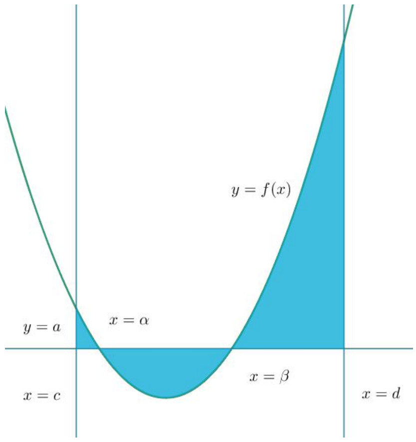
$$\frac{d}{da}S(a) = 2\alpha - c - d + 2a\alpha' - 2f(\alpha)\alpha' = 2\alpha - c - d + 2a\alpha' - 2a\alpha' = 2\alpha - c - d$$

さらに, 右図のような状況のとき（区間で 2 点で交わる）,

$a$ をを変化させて,

図の青い部分の面積の和を最小にするのは,

$\beta - \alpha = \dfrac{1}{2}(d - c)$




上と同様に示せます。当たり前みたいな結果に感じ入るな。