定数分離法は段階あり

22 信大

m は実数とする。

x の 2 次方程式　$x^2-(m+2)x+2m+4=0$ の $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にある実数解がただ 1 つであるとき, m の値の範囲を求めよ。ただし, 実数解の個数は 1 つと数える。

22 千葉大

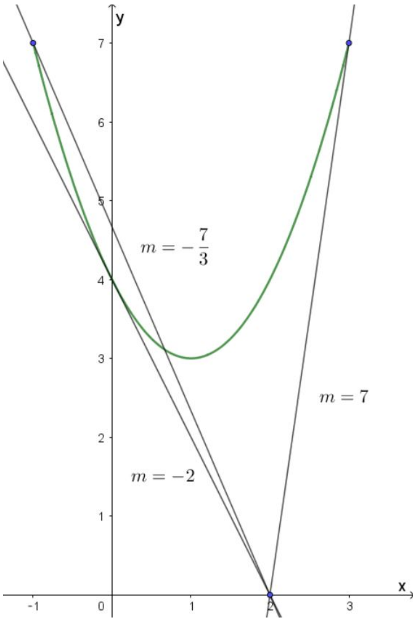
r を正の実数とし, 関数 $f(x)=x+\dfrac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ を考える。

(1) $r=1$ のとき,$f(x)$ はつねに増加することを示せ。

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ。

条件：$0<r<c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する。

方程式論で解く解答はよく見るので, 定数分離法で解く。



$x^2-x+4=m(x-2)$ ($-1 \leqq x \leqq 3$) と変形し

$y=x^2-x+4$ と $y=m(x-2)$ の交点が 1 つである

m の範囲を求めればよい。

接するのは, 与式の判別式を D として,

$D=(m+2)^2-4(2m+4)=0$

$m^2-4m-12=0$

$(m-6)(m+2)=0$

$m=-2, 6$

グラフから,$m<-\dfrac{7}{3}, m=-2, 7 \leqq m$

数 III まで段階が上がると,

$m=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\dfrac{4}{x-2}$

$f(x)=x+\dfrac{4}{x-2}$ として,

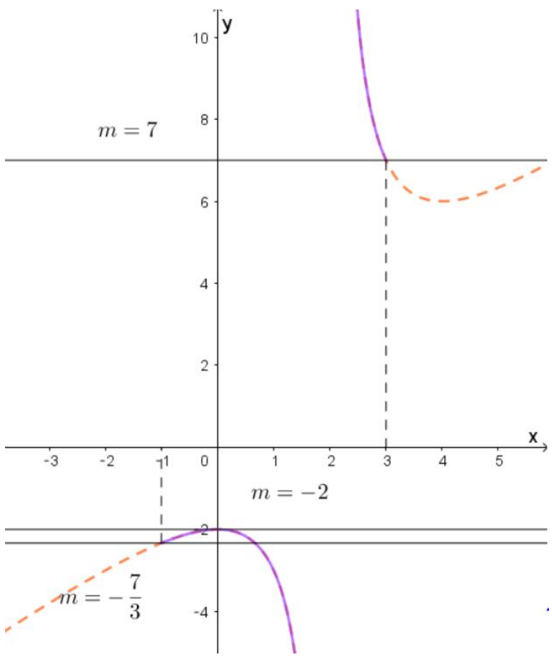
$y=m$ と $y=f(x)$ の交点が 1 つになる

m の範囲を求めればよい。

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	/	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{7}{3}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	/	$\searrow$	7



千葉の問題も定数 r の分離をして,

(1) $f'(x)=1-\dfrac{1}{2}\dfrac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}-\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

$f'(0)=1>0$ で, この分子を 0 とすると,$(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}=\sin x\cos x$

この両辺を 2 乗して,$(1+\sin^2 x)^3=\sin^2 x(1-\sin^2 x)$

$\sin^2 x=t$ とおくと,$0\leqq t\leqq 1$ で,$t^3+3t^2+3t+1=t(1-t)$ つまり　$t^3+4t^2+2t+1=0$

あきらかに実数解なし, つまり正の定符号。つねに増加する。

(2) r をいれて微分して, 上と同様にして, r を分離すると,

$r^2=\dfrac{(t+1)^3}{t(1-t)}$ この右辺を $g(t)$ として,

$g'(t)=\dfrac{3(1+t)^2t(1-t)-(t+1)^3(-2t+1)}{t^2(1-t)^2}=\dfrac{(1+t)^2}{t^2(1-t)^2}\{3t(1-t)+(t+1)(2t-1)\}$

$=-\dfrac{(1+t)^2}{t^2(1-t)^2}(t^2-4t+1)$

$0\leqq t\leqq 1$ で $g'(x)=0$ となるのは,$t=2-\sqrt{3}$ で, このとき,$r^2=\dfrac{(3-\sqrt{3})^3}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}=6\sqrt{3}$

$r>0$ より,$r=\sqrt{6\sqrt{3}}$ これが, 微分したものが正から負になる値, つまり題意の c

ちなみに, 下の左の緑のグラフが $f(x)$, 微分したものがオレンジのグラフ。

右の青のグラフが $g(x)$ のグラフ。