軌跡の梃子（てこ）

難しくないのに, てこずった（梃子がずれるが語源だって）問題。

22 東工大

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数。$\angle$A$=\alpha$ および $\angle$P$=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が, 次の 2 つの条件を満たしながら, 時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで x,y 平面を動くとする。

(a)　時刻 t での点 A,B の座標は, それぞれ A$(\sin t,0)$,B$(0,\cos t)$ である。

(b)　点 P は第一象限にある。

(1)　点 P はある直線上を動くことを示し, その直線の方程式を α を用いて表せ。

(2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。

(3)　xy 平面内において, 連立不等式 $x^2-x+y^2<0, x^2+y^2-y<0$ により定まる領域を D とする。このとき, 点 P は領域 D には入らないことを示せ。

(1)　なぜ手こずったかというと, 解析的な方法も, 代数的な方法も, 計算はできるのにそれ以上進まないからだったのだ。手こずったほうから, 説明しよう。

その１　複素数の回転を使って P(x,y) を計算する。P は A の周りに B を $-\alpha$ 回転,$\cos\alpha$ 倍すればいい。

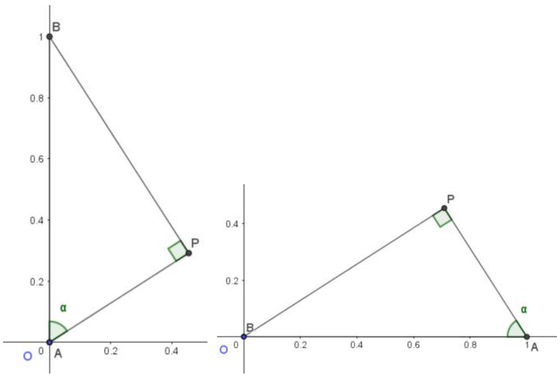
$\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)(i\cos t-\sin t)+\sin t$ として,$x=\sin(\alpha-t)\cos\alpha+\sin t, y=\cos(\alpha-t)\cos\alpha$

この式から t を消去すればいいのかと思っても, 直線なんて出てきそうもない。

その２　ベクトルを使って x と y の関係式を計算する。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が垂直,$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角 α 。

出てきた式が $x\sin t-y\cos t=\sin^2 t-\cos^2\alpha$

この式から t を消去すればいいのかと思っても, 直線なんて出てきそうもない。



とりあえず, 答えを出そうと

（直線と教えてくれてるので）,

連続的に動く両端でチェック。

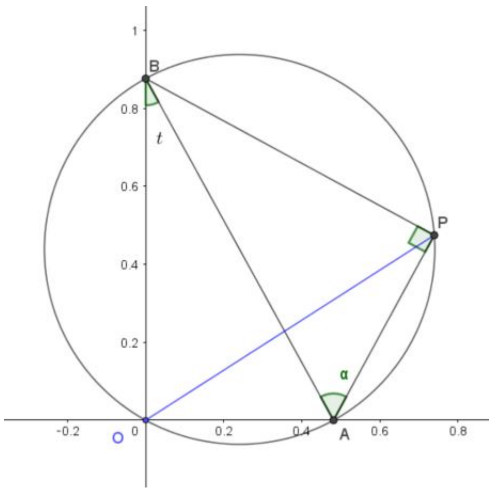
答　$y=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\cdot x=\dfrac{x}{\tan\alpha}$

数学には解析的方法と代数的方法と幾何学的方法の 3 つがある。で,

その３　幾何学的にとなると,

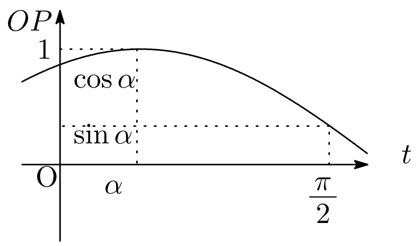
円に内接する四角形に気づき,OP を結べば終わり。

t にかかわらず,$\angle BOP=\angle BAP=\alpha$



(2)　道のりは積分か, どころか, 直線の上の点だから OP の長さがわかれば引き算で出る。

これも初等幾何,△OPA で正弦定理。$\dfrac{OP}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t+\alpha\right)}=\dfrac{OA}{\sin t}=1$　より,$OP=\cos(t-\alpha)$



グラフより, 求める道のりは,

$1-\cos\alpha+1-\sin\alpha=2-(\cos\alpha+\sin\alpha)$

(3)　(2) を使うと, 原点との距離が近い点は

$\left(\cos\alpha\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha),\cos\alpha\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\right)=(\cos\alpha\sin\alpha,\cos\alpha\cos\alpha)=\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{2},\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)=(x,y)$

とおけば,$(2x)^2+(2y-1)^2=1$ つまり,$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ 上にある。

あるいは,

$\left(\sin\alpha\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha),\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\right)=(\sin\alpha\sin\alpha,\sin\alpha\cos\alpha)=\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2},\dfrac{\sin 2\alpha}{2}\right)=(x,y)$

とおけば,$(2x-1)^2+(2y)^2=1$ つまり,$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 上にある。