円錐の円錐

22 東大

座標空間内の点 A$(0,0,2)$ と点 B$(1,0,1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ=2 を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

主人公は M，ひたすら文字を導入しよう。

P(s,t,u) とおくと,$s^2+t^2=(2-u)^2$

s,t,u 固定。

Q$(p,q,0)$ とおくと,

PQ=2 より $(s-p)^2+(t-q)^2+u^2=2^2$

つまり $(p-s)^2+(q-t)^2=4-u^2\cdots$①

Q は中心 $(s,t,0)$, 半径 $\sqrt{4-u^2}$ の円上。

M(x,y,z) とおくと,M は PQ の中点だから,

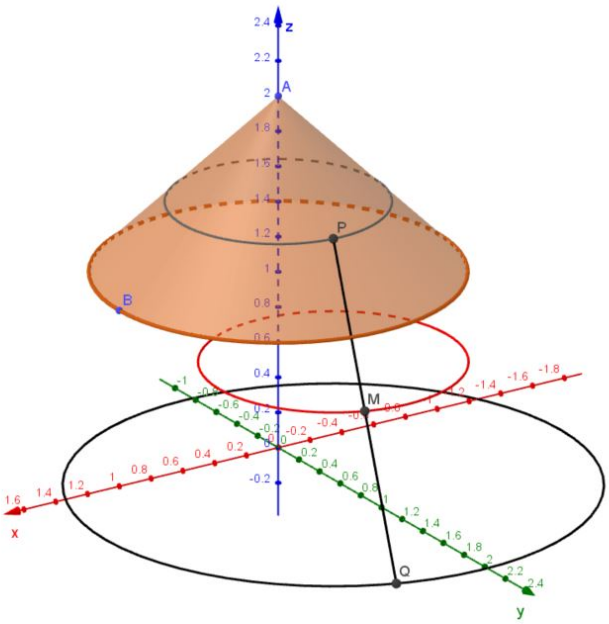
$x=\dfrac{s+p}{2}, y=\dfrac{t+q}{2}, z=\dfrac{u}{2}$

$p=2x-s, q=2y-t, u=2z$ を①に代入して,

$(2x-2s)^2+(2y-2t)^2=4-(2z)^2$

つまり,$(x-s)^2+(y-t)^2=1-z^2$

M は中心 (s,t,z), 半径 $\sqrt{1-z^2}$ の円上。

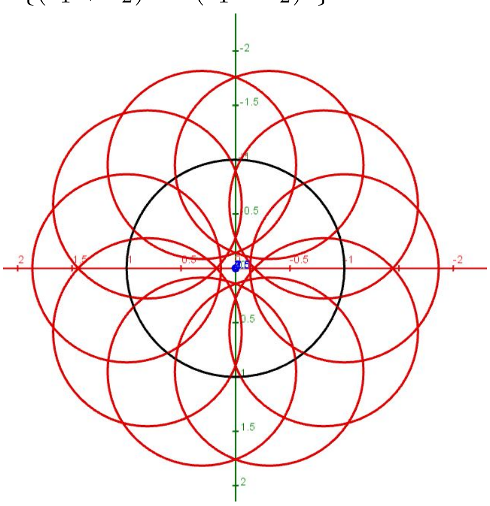


固定していた s,t を動かすと，半径 $2-u=2-2z$ の円上を中心に，上の円が回ることになる。これが，$\dfrac{1}{2}\leqq z\leqq 1$ で z 軸に垂直な平面で切った断面積になる。

$r_1=2-2z$ と $r_2=\sqrt{1-z^2}$ の大小関係によって,

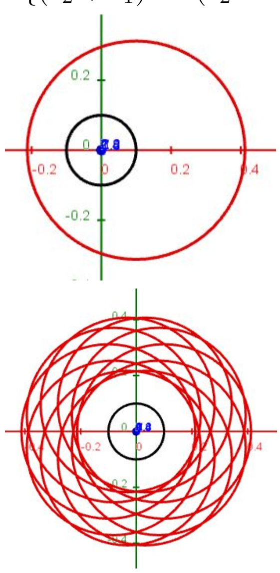
(i) $r_1>r_2$ つまり $\dfrac{1}{2}\leqq z<\dfrac{3}{5}$ のとき,

$\pi\{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2\}$



(ii) $r_1<r_2$ つまり $\dfrac{3}{5}<z\leqq 1$ のとき,

$\pi\{(r_2+r_1)^2-(r_2-r_1)^2\}$



めでたくも同じになって，$4r_1r_2\pi = 8\pi(1-z)\sqrt{1-z^2}$

積分計算。$8\pi\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-z)\sqrt{1-z^2}dz = \frac{4}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi$　何故なら，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-z^2}dz = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{1}z\sqrt{1-z^2}dz = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}(1-z^2)'(1-z^2)^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{3}\left[(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

さて立体を見てみると，青い皿を伏せたようなものから，中の黒い部分を抜いたもの。