正八面体に内接する6球

A 版に形式を変えて 22 年入試開始。

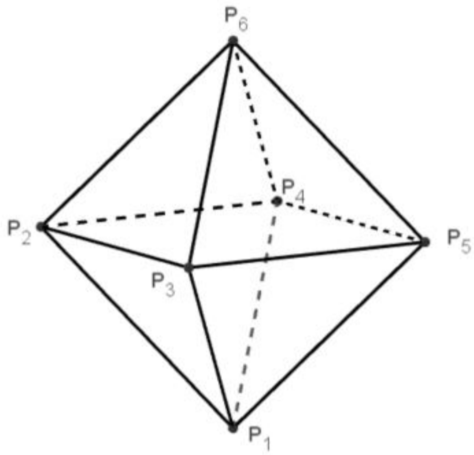
22 早稲田

一辺の長さが $\sqrt{3}+1$ である正八面体の頂点を下図のように $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする。
各 $i = 1, 2, \cdots, 6$ に対して，P_i 以外の 5 点を頂点とする四角錘のすべての面に内接する球（内部を含む）を B_i とする。
B_1 の体積を X とし，
B_1 と B_2 の共通部分の体積を Y とし，
B_1, B_2, B_3 の共通部分の体積を Z とする。
さらに $B_1, B_2, \cdots, B_n$ を合わせて得られる立体の体積を $V_n (n = 2, 3, \cdots, 6)$ とする。

(1) $V_n = aX + bY + cZ$ となる整数 a, b, c を $n = 2, 3, 6$ の場合について求めよ。

(2) X の値を求めよ。

(3) V_2 の値を求めよ。

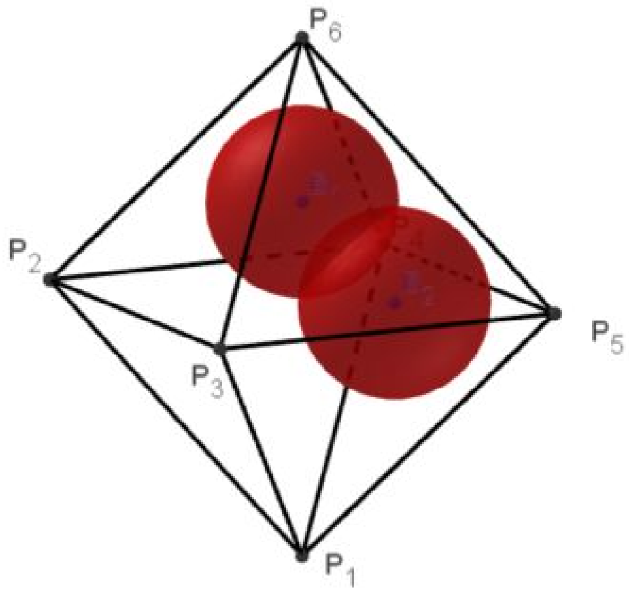


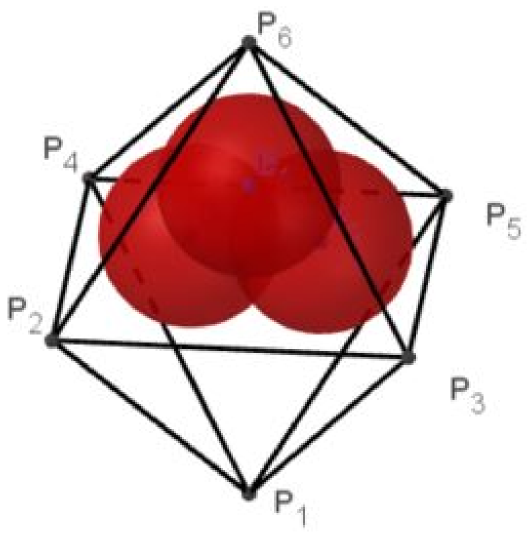
今年の早稲田の問題は慶應よりは計算量も多いし面白いな，慶應医よりは易しいが。

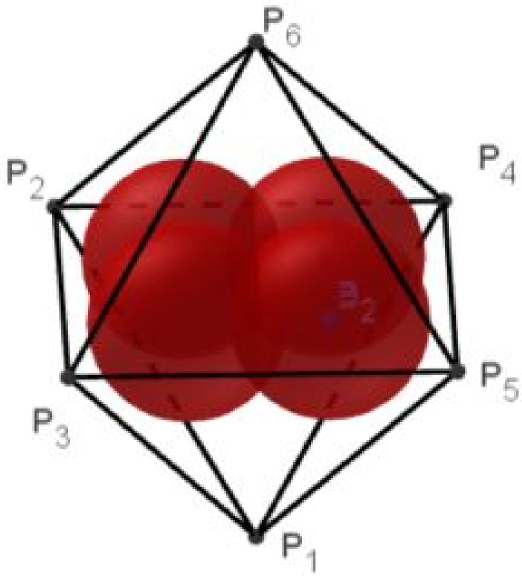
(1) $n = 2, 3$ はすぐわかるが，$n = 6$ は対称性を考慮して，まず水平な 4 つを並べてから，

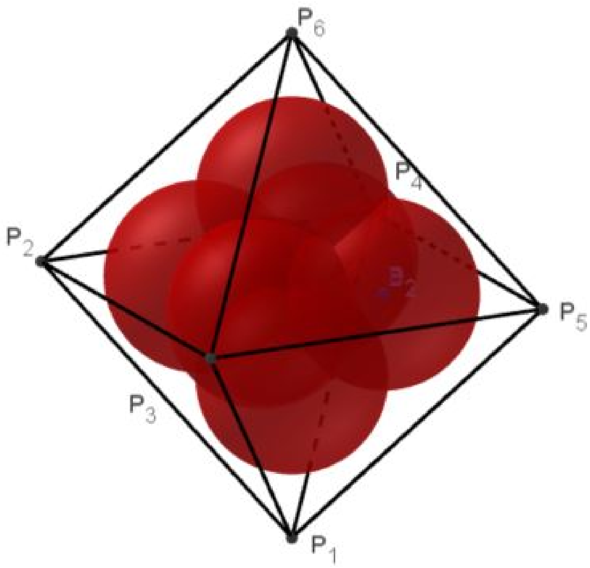
上と下から球を付け加えると考えると，

n	a	b	c
2	2	-1	0
3	3	-3	1
6	6	-12	8

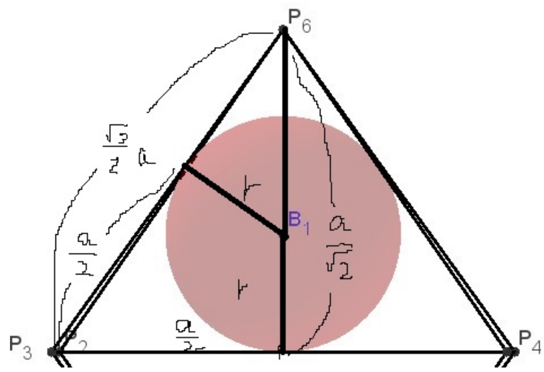






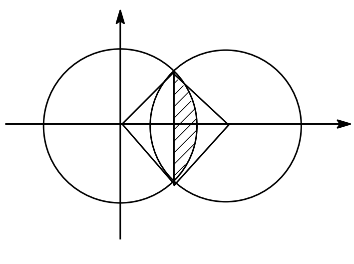


(2) 半径を求めるには,
体積を計算する手もあるが,
接している点を含む断面を考えれば,
三平方の定理でいける。
$a=\sqrt{3}+1$ として
$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-r\right)^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)^2$ から,
$r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ なので,
$X=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$



(3) 球 2 つの共通部分は，中心間の距離がわかればいい。
正八面体の中心から見ると，P_6, P_5 の方向それぞれに r だけ離れるので, 中心間の距離は $\sqrt{2}r$ である。

$$Y=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)dx$$



$$=2\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=2\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=2\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{12}\right)\pi$$

よって $V_2=2X-Y=2\cdot\frac{4\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{12}\right)\pi=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{12}\right)\pi$