サイクロイド

A 版に形式を変えて 22 年入試開始。

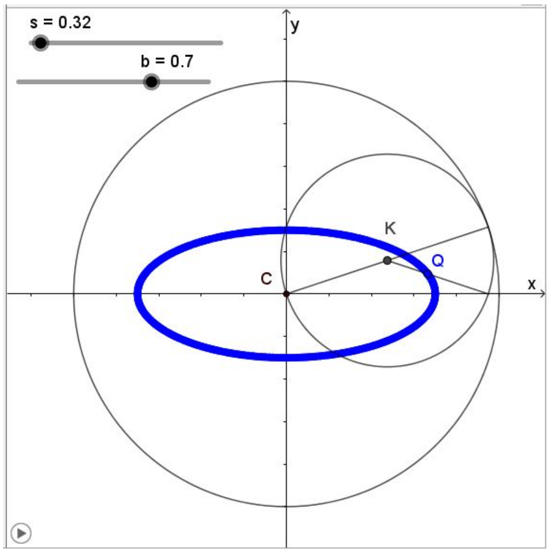
22 慶應医（文章が多くて穴埋めなので略しながら）

(2)　a を正の実数とする。原点 O$(0,0)$ を中心とする半径 a の円 C に，半径が $\dfrac{a}{2}$ で原点 O を通る円 K を点 A$(a,0)$ において内接させる。この円 K を円 C に沿って滑らないように転がす。ただし，K と C の接点が C 上を反時計回りに動くようにする。

(3) 円 K が点 A において円 C に内接しているとき，K の内部に固定された点 Q$(b,0)$(ただし $0<b<a$) をとる。円 K を，C との接点が C 上を一周するまで (2) に述べたやり方で C に沿って転がすとき，点 Q が動いてできる曲線を S_1 とする。S_1 上の点の座標を (x,y) として，S_1 の方程式を x,y を用いて書け。

(4) 円 K が点 A において円 C に内接しているとき，円 C に固定された点 R$(0,a)$ をとる。今度は円 K を固定して，円 C の方を K に接した状態で滑らないように K に沿って転がす。R が描く曲線を S_2 をする。原点 O を極とし， x 軸の正の部分を始線とする極座標 (r,θ) による S_2 の極方程式を求めよ。ただし，r,θ はそれぞれ S_2 上の点の原点からの距離，および偏角である。

さて，久しぶりのサイクロイド，(1) にはヒントとして点の回転の公式を導かせている。行列がなくなったので，複素数で回転をするのだろう。
(2) もこの回転の公式で計算させるつもりらしいが，サイクロイドは回る円の中心とその円上の点の運動をベクトル的に合成させるのがわかりやすいやり方。



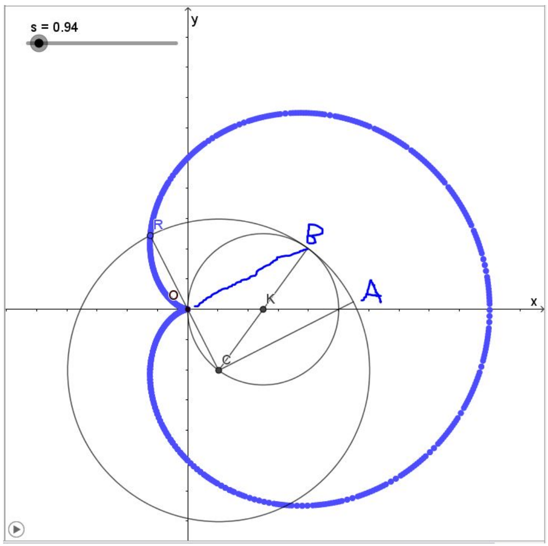
円 K の中心は $(\frac{a}{2}\cos\beta, \frac{a}{2}\sin\beta)$ とおける。
円上の点 Q の回転角 α が，滑らないという条件で決まる。
円 C 上の弧の長さ $a\theta$ と円 K 上の弧の長さ $\dfrac{a}{2}\alpha$ が等しいので，
$\alpha=2\beta$。動径が β でそれから，2β もどるから $-\beta$。
2 つの運動を合成しよう。

$$x=\frac{a}{2}\cos\beta+\left(b-\frac{a}{2}\right)\cos(-\beta)=b\cos\beta,$$

$$y=\frac{a}{2}\sin\beta+\left(b-\frac{a}{2}\right)\sin(-\beta)=(a-b)\sin\beta$$

β を消去すると，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{(a-b)^2}=1$ 楕円だ。

(3) 上のやり方でもいけるが，極方程式だから図から求まれば簡単。



左図において，
KB の動径を β とおくと，上と同じ理由で $\angle BCA=\dfrac{\beta}{2}$
また，$\angle KBO=\angle KOB=\dfrac{\beta}{2}$
すると，$OB//CA\perp CR$
直角三角形 OBC で $OC=a\sin\dfrac{\beta}{2}$

$$r=OR=a-a\sin\frac{\beta}{2},\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}$$

なので，$r=a-a\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=a(1+\cos\theta)$
カージオイドだ。