三角関数の積分

A 版に形式を変えて 22 年入試開始。

22 同志社

定数 a は $0<a<1$ とする。θ を実数とし，関数 $f(\theta)=\dfrac{1-a^2}{2\pi(1+a^2-2a\cos\theta)}$ とする。

次の問いに答えよ。

(1) $t=\tan\dfrac{\theta}{2}(-\pi<\theta<\pi)$ とおいて，$f(\theta)$ を t の式で表す。この，t の式を $f_1(t)$ とすると，

t の関数 $f_1(t)$ はある定数 b を用いて，$f_1(t)=\dfrac{b(1+t^2)}{2\pi(b^2+t^2)}$ と表せる。 b を a の式で表せ。

(2)$g(\theta)$ は連続で 2π を周期とする周期関数とする。

c を実数とするとき，等式 $\displaystyle\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta=\int_c^{c+2\pi}g(\theta)d\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $-\pi<\theta<\pi$ のとき，

実数 $u\left(-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は (1) の b を用いて $b\tan u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ を満たすとする。

このとき，$f(\theta)$ を u で表した式を $f_2(u)$ とし，式 $f_2(u)\dfrac{d\theta}{du}$ の値を h とする。 h を求めよ。

(4) r を実数とする。定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta-r)\cos\theta d\theta$ を a と r の式で表せ。ただし，

必要ならば，(3) の h に対して，等式 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta=\pi h$ が成り立つことを説明なしで用いてよい。

三角関数の積分は，2・3 倍角の公式で次数を下げたり，積を和に直す公式を使いながら技術を駆使して計算するのだが，方法によって答えが違ったり，ちょっと嫌なところではないかな？

例えば，$\displaystyle\int\sin^3 xdx=-\int(1-\cos^2 x)(\cos x)'dx=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

一方 $\displaystyle=\int\left(\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\right)dx=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+C$

ちなみに，Geogebra では，上の答を TrigCombine すると下の答になる。

で,「どこまで積分できるんだ，いったい」と不安になったりしない？

これは，三角関数の有理関数は積分可能であるという事実の例です。

『**解析概論**』に,「通例微積分法で ’ 不定積分ができる ’ というのは， $f(x)$ が初等関数であるとき，その原始関数が初等関数の範囲内に存在することをいうのであるが，そのような場合には，変数を適当に変換すれば，たいがい有理関数の積分に帰するのである」とある。

その例として，$\sin x,\cos x$ の有理関数が出ている。それが (1)

(1) $\cos\theta=\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ だから，

$$\frac{2\pi f_1(t)}{1-a^2}=\frac{1+t^2}{(1+a^2)(1+t^2)-2a(1-t^2)}=\frac{1+t^2}{(1-a)^2+(1+a)^2t^2}$$

$f_1(t)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-a^2}{(1+a)^2}\dfrac{1+t^2}{\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^2+t^2}=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-a}{1+a}\dfrac{1+t^2}{\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^2+t^2}$ よって，$b=\dfrac{1-a}{1+a}$

(2) は当たり前だが,「示せ」といわれりゃ，$g(t)=g(t\pm2\pi)$ だから，

$$\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta=\int_0^{c}g(\theta)d\theta+\int_c^{2\pi}g(\theta)d\theta$$

最初の積分で $t=\theta+2\pi$ とおけば，

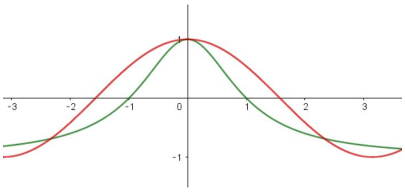
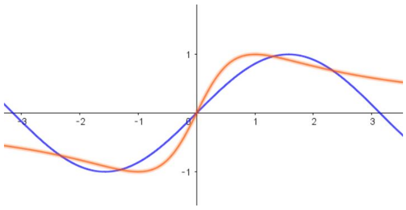
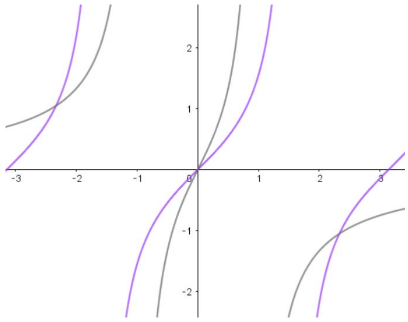
θ	0	c
t	2π	$c+2\pi$

で，$d\theta=dt$

$$\int_{2\pi}^{c+2\pi}g(t-2\pi)dt+\int_c^{2\pi}g(\theta)d\theta=\int_{2\pi}^{c+2\pi}g(t)dt+\int_c^{2\pi}g(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta$$

　$t=\tan\dfrac{\theta}{2}(-\pi<\theta<\pi)$ とおくのは，一般的な方法。目で見てみるか。

$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2},\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(3) t の有理式になりました。次の工夫は（これも一般的だけれど），

b^2+t^2 の形から，$\tan\dfrac{\theta}{2}=t=b\tan u$ の置き換えをする。これが定石。

$\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\dfrac{d\theta}{du}=b\dfrac{1}{\cos^2 u}$ なので，$\dfrac{d\theta}{du}=\dfrac{2b}{\cos^2 u(1+b^2\tan^2 u)}$

よって　$h=f_2(u)\dfrac{d\theta}{du}=\dfrac{b}{2\pi}\dfrac{1+b^2\tan^2 u}{b^2+b^2\tan^2 u}\dfrac{2b}{\cos^2 u(1+b^2\tan^2 u)}=\dfrac{1}{\pi}$

(4)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta-r)\cos\theta d\theta$　まず，$f(\theta-r)$ を何とかしようと思う。

$\theta-r=v$ とおくと，$d\theta=dv$ で $\begin{array}{c|cc}\theta & 0 & 2\pi\\ \hline v & -r & 2\pi-r\end{array}$，周期 2π にも注意すると，

$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta-r)\cos\theta d\theta=\int_{-r}^{2\pi-r}f(v)\cos(v+r)dr=\int_{-r}^{2\pi-r}f(v)(\cos v\cos r-\sin v\sin r)dr$

$\displaystyle=\cos r\int_{-r}^{2\pi-r}f(v)\cos v-\sin r\int_{-r}^{2\pi-r}\sin vdr=\cos r\int_{-\pi}^{\pi}f(v)\cos vdv-\sin r\int_{-\pi}^{\pi}\sin vdr$

さて，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(v)\cos vdv=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-a^2}{2\pi}\frac{\cos v}{1+a^2-2a\cos v}dv$

$\cos v$ を少なくすると考えると,（$\cos v$ についての一次分数だから分子の次数を下げるために割り算する）

そして，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta=\pi h=1$（証明なしにって，証明したんじゃん）を使って，

$$\frac{1-a^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+a^2-2a\cos v)\dfrac{1}{-2a}+\dfrac{1+a^2}{2a}}{1+a^2-2a\cos v}dv=\frac{1-a^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{-2a}+\frac{\dfrac{1+a^2}{2a}}{1+a^2-2a\cos v}\right)dv$$

$$=\frac{1-a^2}{-4a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dv+\frac{1+a^2}{2a}\int_{-\pi}^{\pi}f(v)dv=\frac{1-a^2}{-2a}+\frac{1+a^2}{2a}=\frac{1-a^2}{-2a}+\frac{1+a^2}{2a}=a$$

次に，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(v)\sin vdv=0$　何故なら，

合成関数の積分（$\cos v$ を微分した $-\sin v$ がかけてある構造になる）をして，対数関数としてもいいが，

$f(-\theta)\sin(-\theta)=-f(\theta)\sin\theta$ なので，被積分関数が奇関数（$-\pi$ から π はヒントか)。

よって，$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta-r)\cos\theta d\theta=a\cos r$

　解けたけど，この f って何だろうと思うよね。

楕円の極方程式（を 2π で割ったもの）です。

$\tan\alpha=\dfrac{1-a^2}{2a}$ としたとき

$2\pi f(\theta)=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos\theta}$