2 変数関数の最大・最小

21 順天堂 1

連立不等式 $-2 \leqq x \leqq 2, -2 \leqq y \leqq 2$ の表す領域を D とする。
点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，次の式のとる値の最大値と最小値を求めよ。

(1) $2x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1$

(2) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y + 1$

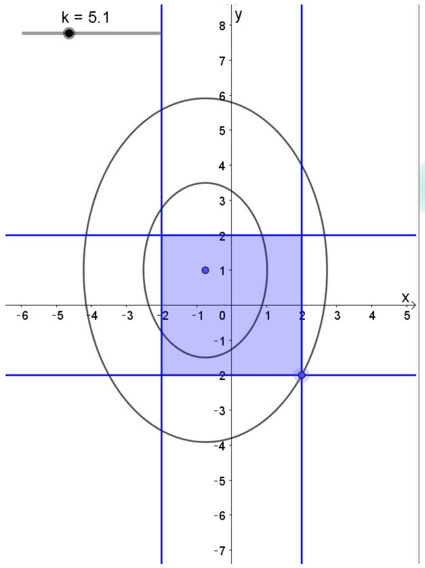
定義域が与えられたときの 2 変数関数の値域を求める問題。閉区間の連続関数だから最大値と最小値がある。
2 変数関数のいつでも使える方法は，片方固定して 1 変数の最大最小を求め，次に固定した変数を動かすもの。2 次関数だから平方完成。この問題は変域が長方形だから，これでよさそう。
方法はこれだけでない。速く分かりやすくするには別の方法のほうがいいかも，ということで,「2 変数関数の最大最小」について。

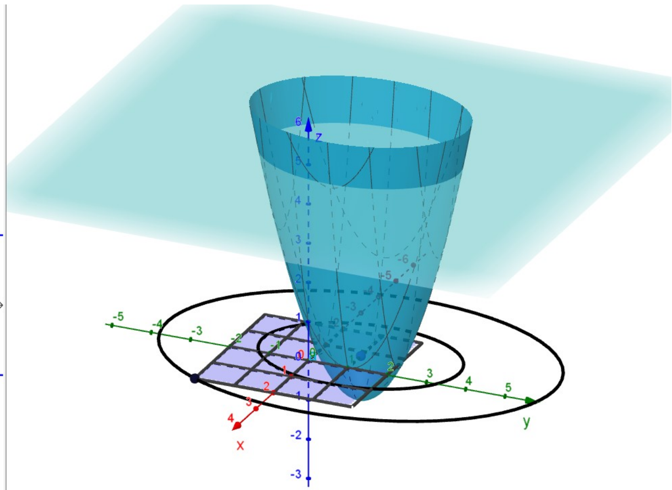
(1) (与式) $= 2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + (y-1)^2 - \dfrac{9}{8} \geqq -\dfrac{9}{8}$ (等号は $x = -\dfrac{3}{4}, y = 1$ のとき)

$\left(-\dfrac{3}{4}, 1\right)$ は D に含まれるので，最小値は $-\dfrac{9}{8}$

最大値を求めよう。与式をまず $-2 \leqq x \leqq 2$ の 2 次関数とみて（ y を固定して），
$x = 2$ のとき最大で $(y-1)^2 + 14$，次に $-2 \leqq y \leqq 2$ の 2 次関数とみて，$y = -2$ のとき最大で，最大値 23

解析的方法でした。次に代数幾何的方法として，$2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + (y-1)^2 - \dfrac{9}{8} = k$ とおくと，中心 $\left(-\dfrac{3}{4}, 1\right)$ の楕円で k が最小になるのは $(x, y) = \left(-\dfrac{3}{4}, 1\right)$ のときで，最小値 $-\dfrac{9}{8}$
最大になるのは，$(x, y) = (2, -2)$ のときで，最大値 23

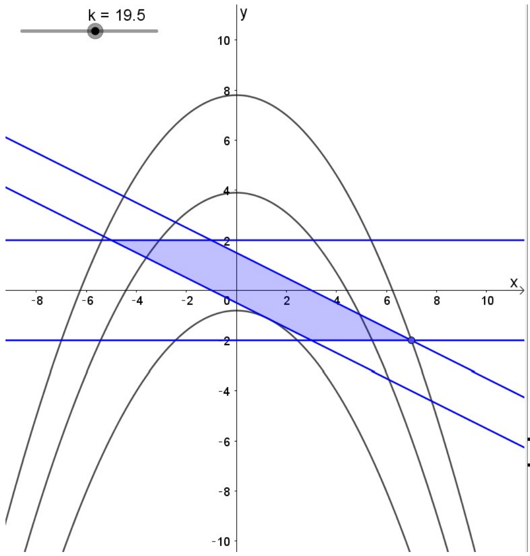


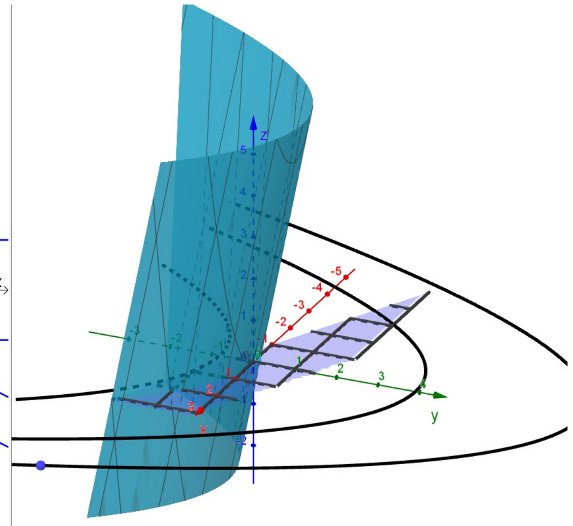


線形計画法といわれる，この方法も 3 次元グラフの断面図とみていたんだなと。

更に解析的には，与式を x, y に関して偏微分して 0 とすると，$4x + 3 = 0, 2y - 2 = 0$ で，最小を与える値がわかる。これは，偏微分して 0 が極値の必要条件だから D に含まれていれば最大値か最小値。あとは，境界が最大最小を与えるはずで，試す。なんてのは，穴埋め問題なら良いかも。

(2) (与式) $= (x - 2y + 1)^2 + 5y$
まず $-2 \leqq x \leqq 2$ の 2 次関数とみる（ y を固定して）と，$x = 2y - 1$ で場合分けする必要が出てくる。面倒なので，あとでやるにして，まず線形計画法を考えてみる。傾いた楕円か？難しい。ここからだ。基本に戻って，置き換えをして簡素化しよう。
$x - 2y + 1 = t$ とおくと（変数変換するわけ），$x = 2y - 1 + t$ より，$-2 \leqq 2y - 1 + t \leqq 2$
$-2 \leqq 2y - 1 + t \leqq 2, -2 \leqq y \leqq 2$ のときの，$t^2 + 5y$ の最大最小を求める。
$t^2 + 5y = k$ とおくと，頂点 $\left(0, \dfrac{k}{5}\right)$ の上に凸の放物線。
平行四辺形 $-2 \leqq 2y - 1 + t \leqq 2, -2 \leqq y \leqq 2$ と交わりながら変化すると，
最大は $(7, -2)$ を通るときで，最大値 39。
最小は直線 $2y - 1 + t = -2$ と接するときで，
$t^2 - 5\dfrac{t+1}{2} = k$ つまり $2t^2 - 5t - 5 - 2k = 0$ の判別式を 0 として，$25 + 8(5 + 2k) = 0$ で，$-\dfrac{65}{16}$





面倒な方もやっておくと，最小値は
(i) $2y - 1 \leqq -2$ つまり $y \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき，
$x = -2$ で最小　$4y^2 + 9y + 1 = 4\left(y + \dfrac{9}{8}\right)^2 - \dfrac{65}{16}$
(ii) $-2 \leqq 2y - 1 \leqq 2$ つまり $-\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，
$x = 2y - 1$ で最小　$5y$
(iii) $2y - 1 \geqq 2$ つまり $y \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき，
$x = 2$ で最小　$4y^2 - 7y + 9$
最大値は，
(i) $2y - 1 \leqq 0$ つまり $y \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，
$x = 2$ で最大　$4y^2 - 7y + 9$
$y = -2$ のとき，39
(ii) $2y - 1 \geqq 0$ つまり $y \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，
$4y^2 + 9y + 1$
$y = 2$ のとき，35