

# 回転体の体積の評価

## 21 信大 後期

$a, b$  を  $1 \leq a < b \leq 5$  をみたす整数とする。

区間  $a\pi \leq x \leq b\pi$  において、曲線  $y = \sqrt{x} \sin x$  と  $x$  軸で囲まれた部分が、 $x$  軸の周りに 1 回転して

できる回転体の体積を  $V$  とする。

このとき、 $V \geq 6\pi^2$  となるような組  $(a, b)$  をすべて求めよ。

GeoGebra の回転体が新しいので、ついやりたくなる。

$$\int x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C \text{ なので,}$$

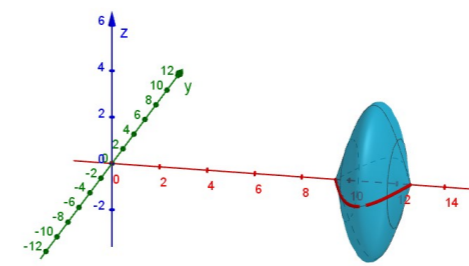
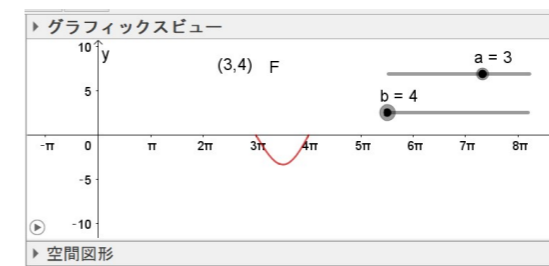
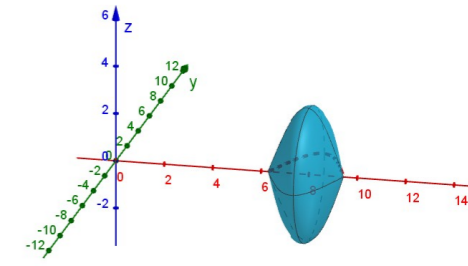
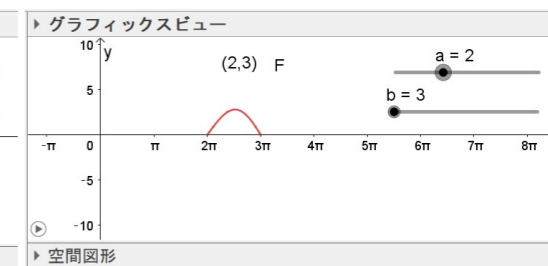
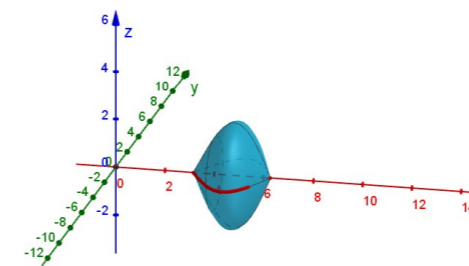
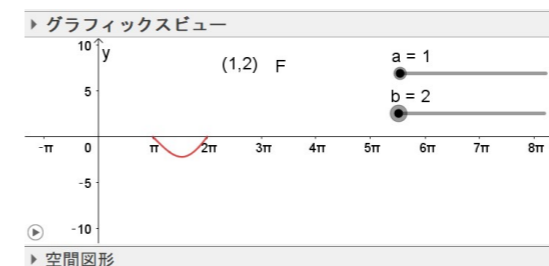
$$V = \pi \int_{a\pi}^{b\pi} y^2 dx = \pi \int_{a\pi}^{b\pi} x \sin^2 x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{a\pi}^{b\pi} x(1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} \right]_{a\pi}^{b\pi} = \frac{\pi^3}{4} (b^2 - a^2) \geq 6\pi^2 \text{ より}$$

$\pi(b^2 - a^2) \geq 24$  をみたす実数の組  $(a, b)$  を見つけられたい。

$(a, b, b^2 - a^2) = (1, 2, 3), (1, 3, 8), (1, 4, 15), (1, 5, 24), (2, 3, 4), (2, 4, 12), (2, 5, 21), (3, 4, 7), (3, 5, 16), (4, 5, 9)$

で、 $(a, b) = (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5)$



右の 1 個のやつで十分なんだな。あとは 2 個以上で十分。いい評価だ。